

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及解析(完整精准版)

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 下列曲线中有渐近线的是

- (A) $y = x + \sin x$. (B) $y = x^2 + \sin x$. (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$. (D)

$$y = x^2 + \sin \frac{1}{x}.$$

【解析】 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}) = 1$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x + \sin \frac{1}{x} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

$\therefore y=x$ 是 $y=x+\sin \frac{1}{x}$ 的斜渐近线

【答案】 C

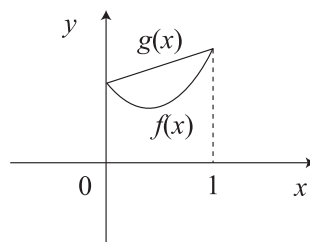
(2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数， $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

- (A) 当 $f''(x) \geq 0$ 时， $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f''(x) \geq 0$ 时， $f(x) \leq g(x)$
 (C) 当 $f''(x) \leq 0$ 时， $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f'' \geq 0$ 时， $f(x) \leq g(x)$

【解析】 当 $f''(x) \geq 0$ 时， $f(x)$ 是凹函数

而 $g(x)$ 是连接 $(0, f(0))$ 与 $(1, f(1))$ 的直线段，如右图

故 $f(x) \leq g(x)$



【答案】 D

(3) 设 $f(x, y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) =$

- (A) $\int_0^1 dx \int_1^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.
 (B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$.

$$(C) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta+\sin\theta}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\cos\theta+\sin\theta}^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

【解析】积分区域如图

$0 \leq y \leq 1$.

$$-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1-y$$

用极坐标表示, 即: $D_1: \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 1$

$$D_2: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

【答案】D

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$, 则

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$$

(A) $2\pi \sin x$. (B) $2 \cos x$. (C) $2\pi \sin x$. (D) $2\pi \cos x$.

【解析】令 $Z(a, b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx$

$$\begin{cases} Z'_a = 2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)(-\cos x) dx = 0 & (1) \\ Z'_b = 2 \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)(-\sin x) dx = 0 & (2) \end{cases}$$

由(1)得 $2a \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = 0$ 故 $a = 0, a_1 = 0$

由(2)得 $b = \frac{\int_0^{\pi} x \sin x dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 x dx} = 2$ $b_1 = 2$

【答案】A

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$. (D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$

【解析】 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第4行展开}} c(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} + d(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= -c \cdot b(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + d \cdot a \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\
&= (ad - bc) \cdot bc - ad(ad - bc) \\
&= (ad - bc)(bc - ad) = -(ad - bc)^2
\end{aligned}$$

【答案】 B

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
 (C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【解析】 由 $(\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ 知,

当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关时, 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

所以 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关

反之不成立 如当 $\alpha_3 = 0$, α_1 与 α_2 线性无关时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

【答案】 A

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A)=$ ()
 (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

【解析】 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$

\because A 与 B 相互独立

$\therefore P(AB) = P(A)P(B)$

$\therefore P(A-B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = 0.3$

$P(A)(1-0.5) = 0.3$

$\therefore P(A) = 0.6 \quad P(AB) = P(A)P(B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$

$\therefore P(B-A) = P(B) - P(BA) = 0.5 - 0.3 = 0.2$

【答案】 B

(8) 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$

与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 =$

$\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. 则 ()

- (A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$ (B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$
 (C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$ (D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

【解析】 $EY_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} y[\frac{1}{2}f_1(y) + \frac{1}{2}f_2(y)]dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} yf_1(y)dy + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dy$

$$= \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{2}EX_2$$

$$EY_2 = E\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] = \frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{2}EX_2$$

$$\therefore EY_1 = EY_2$$

$$EY_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \left[\frac{1}{2}f_1(y) + \frac{1}{2}f_2(y) \right] dy = \frac{1}{2}EX_1^2 + \frac{1}{2}EX_2^2$$

$$DY_1 = \frac{1}{2}EX_1^2 + \frac{1}{2}EX_2^2 - \left(\frac{1}{2}EX_1 + \frac{1}{2}EX_2 \right)^2 = \frac{1}{2}EX_1^2 + \frac{1}{2}EX_2^2 - \frac{1}{4}(EX_1)^2 - \frac{1}{4}(EX_2)^2 - \frac{1}{2}EX_1EX_2$$

$$= \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 + \frac{1}{4}EX_1^2 + \frac{1}{4}EX_2^2 - \frac{1}{2}EX_1EX_2$$

$$= \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 + \frac{1}{4}[EX_1^2 + EX_2^2 - 2E(X_1X_2)] = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2 + \frac{1}{4}[E(X_1 - X_2)^2]$$

$$DY_2 = D\left[\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right] = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{4}DX_2$$

$$\therefore DY_1 > DY_2$$

【答案】D

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为_____.

【解析】在点 $(1, 0, 1)$ 处， $z_x \Big|_{(1,0,1)} = \frac{[2x(1 - \sin y) - y^2 \cos x]}{(1,0,1)} \Big|_{(1,0,1)} = 2$

$$z_y \Big|_{(1,0,1)} = \frac{[-x^2 \cos y + 2y(1 - \sin x)]}{(1,0,1)} \Big|_{(1,0,1)} = -1$$

切平面方程为 $z_x(x-1) + z_y(y-0) + (-1)(z-1) = 0$

即 $2x - y - z - 1 = 0$

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x) = 2(x-1)$ ， $x \in [0, 2]$ ，则 $f(7) =$

_____.

【解析】 $\because f(x)$ 是周期为 4 的可导函数

$$\therefore f(7) = f(3) = f(-1) = -f(1) \quad \text{且} \quad f(0) = 0$$

$$\text{又} \quad f'(x) = 2(x-1) \quad \therefore f(x) = x^2 - 2x + c \quad \text{将} \quad f(0) = 0 \text{ 代入得} \quad C = 0$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x \quad x \in [0, 2]$$

$$\therefore f(1) = -1 \quad \text{从而} f(7) = -f(1) = 1$$

(11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 即 $xy' + y \ln \frac{x}{y} = 0$ 两边同除 x 得

$$y' + \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y} = 0$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 代入上式得

$$u + x \frac{du}{dx} + u \ln \frac{1}{u} = 0 \quad \text{整理得}$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{1}{x} dx \quad \text{两端积分得}$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{1}{x} dx + \ln C$$

$$\int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} = \int \frac{1}{x} dx + \ln C$$

$$\ln u - 1 = cx$$

$$u = e^{cx+1}$$

$$y = xe^{cx+1}$$

将 $y(1) = e^3$ 代入上式得 $C = 2$

$$\therefore y = xe^{2x+1}$$

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲面积分 $[\int] z dx + y dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 令
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = -\sin t \end{cases} \quad t: [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_L z dx + y dz &= \int_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t) + \sin t(-\cos t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + \int_0^{2\pi} (-\sin t) d \sin t \\ &= \pi + 0 = \pi \end{aligned}$$

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围

_____.

【解析】 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$

因为 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $|\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3| = |A|$, 负惯性指数为 1

\therefore 设 $\lambda_1 < 0$, 从而 $\lambda_2\lambda_3 \geq 0$

$\therefore |A| \leq 0$

① 若 $|A| < 0$, 则 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$. 此时符合题意而 $|A| = a^2 - 4$

$\therefore a^2 - 4 < 0$. 即 $-2 < a < 2$.

② 若 $|A| = 0$, 则 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0$, 此时 $a = \pm 2$

当 $a = 2$ 时 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$

$\therefore a = 2$ 符合题意

当 $a = -2$ 时 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$ 符合题意

综上, a 的取值范围是 $-2 \leq a \leq 2$

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 是未知数, X_1, X_2, \dots, X_n

为来自总体 X 的简单样本, 若 $c \sum_{i=1}^n x_i^2$ 是 θ 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

【解析】 $E(X^2) = \int_{\theta}^{2\theta} x^2 \cdot \frac{2x}{3\theta^2} d\theta = \frac{2}{3\theta^2} \int_{\theta}^{2\theta} x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3\theta^2} x^4 \Big|_{\theta}^{2\theta}$

$$= \frac{1}{6\theta^2} \cdot 15\theta^4 = \frac{5}{2}\theta^2.$$

$$E\left(C \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = C \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = C \cdot n \cdot \frac{5}{2}\theta^2 \Rightarrow C = \frac{2}{5n}.$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上解答应写出文字说明、证明过程或消算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$ 。

【解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{2t} = \frac{1}{2}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值。

【解】 由 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 得

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 解得}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}, \text{ 由 } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 得 } y = -2x, \text{ 代入原式得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2y + 2x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx})(x^2 + 2xy + 3y^2) - (2xy + y^2)(2x + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 6y \frac{dy}{dx})}{(x^2 + 2xy + 3y^2)^2}$$

将 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ 代入得 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{9} > 0$ ，故 $x = 1$ 为最小点，最小值为 $y = -2$ 。

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 二阶连续可导， $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x},$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

【解】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \cos y \cdot f', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -e^x \sin y \cdot f',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y \cdot f' + e^{2x} \cos^2 y \cdot f'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y \cdot f' + e^{2x} \sin^2 y \cdot f'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x} f'',$$

令 $u = e^x \cos y$, 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ 得

$$f''(u) = 4f(u) + u, \quad \text{或} \quad f''(u) - 4f(u) = u,$$

$$\text{解得 } f(u) = C_1 e^{-2u} + C_2 e^{2u} - \frac{1}{4}u,$$

$$\text{由 } f(0) = 0, f'(0) = 0 \text{ 得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -2C_1 + 2C_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } C_1 = -\frac{1}{16}, C_2 = \frac{1}{16},$$

$$\text{故 } f(u) = -\frac{1}{16}(e^{-2u} - e^{2u}) - \frac{1}{4}u.$$

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 1$) 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy.$$

【解】 令 $\Sigma_0: z = 1$ ($x^2 + y^2 \leq 1$), 取下侧, 其中 Σ 与 Σ_0 围成的几何体为 Ω ,

由高斯公式得

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma+\Sigma_0} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy &= -\iiint_{\Omega} [3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1]dv \\ &= -\iiint_{\Omega} [3(x^2 + y^2) - 6x - 6y + 7]dv = -\iiint_{\Omega} [3(x^2 + y^2) + 7]dv \\ &= -\int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq z} [3(x^2 + y^2) + 7]dv = -\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{z}} (3r^3 + 7r)dr \end{aligned}$$

$$= -2\pi \int_0^1 \left(\frac{3}{4}z^2 + \frac{7}{2}z \right) dz = -2\pi \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{4} \right) = -4\pi,$$

$$\text{而 } \iint_{\Sigma_0} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy = \iint_{\Sigma_0} (z-1)dxdy = 0,$$

$$\text{故 } I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy = -4\pi.$$

(19) (本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$, $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$,

$\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

(II) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛。

【证明】

(I) 方法一

由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 。

令 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 等式 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 两边取极限得 $\cos a - a = 1$ 。

令 $\varphi(x) = 1 - \cos x + x$, $\varphi(0) = 0$,

因为 $\varphi'(x) = \sin x + 1 \geq 0$, 所以 $\varphi(x)$ 单调增加, 由 $\varphi(x) = 0$ 得 $x = 0$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = 0$ 。

方法二

由 $\cos a_n - a_n = \cos b_n$ 得 $a_n = \cos a_n - \cos b_n > 0$, 从而 $0 < a_n < b_n$,

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

(II) 由 $a_n = \cos a_n - \cos b_n$ 得

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\cos a_n - \cos b_n}{b_n} = -\frac{2 \sin\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \sin\left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)}{b_n} \sim \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n},$$

因为 $0 \leq \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n} \leq \frac{b_n}{2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2 - a_n^2}{2b_n}$ 收敛,

由比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛。

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵。

(I) 求方程组 $AX = O$ 的一个基础解系。

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B 。

【解】

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

则方程组 $AX = O$ 的一个基础解系为 $\xi = (-1, 2, 3, 1)^T$ 。

$$\text{(II)} \quad \text{令 } B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_4 + 3x_7 - 4x_{10} & x_2 - 2x_5 + 3x_8 - 4x_{11} & x_3 - 2x_6 + 3x_9 - 4x_{12} \\ x_4 - x_7 + x_{10} & x_5 - x_8 + x_{11} & x_6 - x_9 + x_{12} \\ x_1 + 2x_4 - 3x_{10} & x_2 + 2x_5 - 3x_{11} & x_3 + 2x_6 - 3x_{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由 $AB = E$ 得

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + 3x_7 - 4x_{10} = 1 \\ x_4 - x_7 + x_{10} = 0 \\ x_1 + 2x_4 - 3x_{10} = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 - 2x_5 + 3x_8 - 4x_{11} = 0 \\ x_5 - x_8 + x_{11} = 1 \\ x_2 + 2x_5 - 3x_{11} = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_3 - 2x_6 + 3x_9 - 4x_{12} = 0 \\ x_6 - x_9 + x_{12} = 0 \\ x_3 + 2x_6 - 3x_{12} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{由 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{得}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_{10} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-k_1 \\ 2k_1-1 \\ 3k_1-1 \\ k_1 \end{pmatrix};$$

$$\text{由} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \text{得}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_8 \\ x_{11} \end{pmatrix} = k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-k_2 \\ 2k_2-3 \\ 3k_2-4 \\ k_2 \end{pmatrix};$$

$$\text{由} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{得}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_6 \\ x_9 \\ x_{12} \end{pmatrix} = k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-k_3 \\ 2k_3+1 \\ 3k_3+1 \\ k_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } B = \begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1 \\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数}).$$

(21) (本题满分 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似。

【证明】

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix},$$

由 $|\lambda E - A| = 0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = n$,

由 $|\lambda E - B| = 0$ 得 B 的特征值为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = n$ 。

因为 $A^T = A$, 所以 A 可对角化;

对 B , 因为 $r(0E - B) = r(B) = 1$, 所以 B 可对角化,

因为 A, B 特征值相同且都可对角化, 所以 $A \sim B$ 。

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$,

在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i = 1, 2)$ 。

(I) 求 Y 得分布函数 $F_Y(y)$ 。

(II) 求 EY 。

【解】

$$\begin{aligned} \text{(I) } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X = 1\}P\{Y \leq y | X = 1\} + P\{X = 2\}P\{Y \leq y | X = 2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq y | X = 1\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq y | X = 2\}, \end{aligned}$$

$y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$;

$$\text{当 } 0 \leq y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{3y}{4};$$

当 $1 \leq y < 2$ 时,

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2};$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$,

$$\text{故 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{3y}{4}, & 0 \leq y < 1 \\ \frac{y}{4} + \frac{1}{2}, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}.$$

$$\text{(II) } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < y < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$EY = \int_0^1 \frac{3x}{4} dx + \int_1^2 \frac{x}{4} dx = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}.$$

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0 \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$ 为未知

参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本。

(I) 求 EX 及 EX^2 。

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 。

(III) 是否存在实数 a , 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - a| \geq \varepsilon\} = 0$?

【解】

$$\text{(I) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0 \end{cases}.$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t} \cdot \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{t}} dt$$

$$= \sqrt{\theta} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \sqrt{\theta} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}.$$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} d\left(\frac{x^2}{\theta}\right) = \theta \Gamma(2) = \theta.$$

(II) 似然函数 $L(\theta) = \frac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{\theta}}$,

$$\ln L(\theta) = n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \theta - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{\theta},$$

由 $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{\theta^2} = 0$ 得

θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 。

(III) 由大数定律得 $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $EX^2 = \theta$,

故存在 $a = \theta$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - a| \geq \varepsilon\} = 0$ 。