2017年考研数学一真题及答案解析

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax},x>0\\ b,x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

$(A)ab=\dfrac{1}{2}$　　　　$(B)ab=-\dfrac{1}{2}$

$(C)ab=0$　　　　$(D)ab=2$

【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{ax}=\dfrac{1}{2a},\because f(x)$ 在 $x=0$ 处连续 $\therefore\dfrac{1}{2a}=b\Rightarrow ab=\dfrac{1}{2}$. 选A.

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　　）

$(A)f(1)>f(-1)$　　$(B)f(1)<f(-1)$

$(C)|f(1)|>|f(-1)|$　　$(D)|f(1)|<|f(-1)|$

【答案】C

【解析】$\because f(x)f'(x)>0,\therefore\begin{cases}f(x)>0\\ f'(x)>0\end{cases}(1)$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\ f'(x)<0\end{cases}(2)$，只有C选项满足 (1) 且满足 (2)，所以选C。

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $u=(1,2,2)$ 的方向导数为（　　）

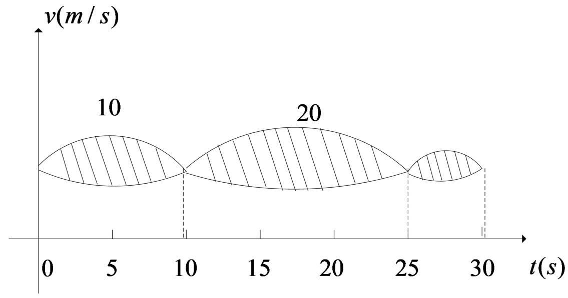
$(A)12$　　$(B)6$　　$(C)4$　　$(D)2$

【答案】D

【解析】$gradf=\{2xy,x^2,2z\},\Rightarrow gradf\Big|_{(1,2,0)}=\{4,1,0\}\Rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial u}=gradf\cdot\dfrac{u}{|\mathrm{u}|}=\{4,1,0\}\cdot\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\}=2.$

选 D.

(4) 甲乙两人赛跑, 计时开始时, 甲在乙前方 10 (单位: m) 处, 图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位： m/s ），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$ ，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 （单位：s），则（　　）



$(A)t_0=10$　　$(B)15<t_0<20$　　$(C)t_0=25$　　$(D)t_0>25$

【答案】B

【解析】从 0 到 t_0 这段时间内甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0}\mathrm{v}_1(\mathrm{t})dt,\int_0^{t_0}\mathrm{v}_2(\mathrm{t})dt,$ 则乙要追上甲，则

$\int_0^{t_0}\mathrm{v}_2(\mathrm{t})-\mathrm{v}_1(\mathrm{t})dt=10$，当 $t_0=25$ 时满足，故选 C.

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

$(A)E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　$(B)E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

$(C)E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　$(D)E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【答案】A

【解析】选项 A,由 $(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha=0$ 得 $(E-\alpha\alpha^T)x=0$ 有非零解，故 $\left|E-\alpha\alpha^T\right|=0$。即 $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆。选项 B,由 $r(\alpha\alpha^T)\alpha=1$ 得 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 n-1 个 0，1.故 $E+\alpha\alpha^T$ 的特征值为 n-1 个 1，2. 故可逆。其它选项类似理解。

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则（　）

(A) A与C相似,B与C相似　　(B) A与C相似,B与C不相似

(C) A与C不相似,B与C相似　　(D) A与C不相似,B与C不相似

【答案】B

【解析】由 $(\lambda E-A)=0$ 可知 A 的特征值为 2,2,1

因为 $3-r(2E-A)=1$，∴A 可相似对角化，且 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $\left|\lambda E-B\right|=0$ 可知 B 特征值为 2,2,1.

因为 $3-r(2E-B)=2$，∴B 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，

$\therefore A\sim C$，且 B 不相似于 C

(7) 设 A,B 为随机概率，若 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 的充分必要条件是（　）

$(A)P(B|A)>P(B|\overline{A})$　　$(B)P(B|A)<P(B|\overline{A})$

$(C)P(\overline{B}|A)>P(B|\overline{A})$　　$(D)P(\overline{B}|A)<P(B|\overline{A})$

【答案】A

【解析】按照条件概率定义展开，则A选项符合题意。

（8）设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是（　）

$(A)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　$(B)2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

$(C)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　$(D)n(\bar{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

【答案】B

【解析】

$$X\sim N(\mu,1),X_i-\mu\sim N(0,1)$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),A\text{正确}$$
$$\Rightarrow(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)\text{，C 正确，}$$
$$\Rightarrow\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}),\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1),n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1),D\text{ 正确,}$$
$$\Rightarrow\sim N(0,2),\frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1),\text{故B 错误.}$$

由于找不正确的结论，故 B 符合题意。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________

【答案】 $f(0)=-6$

【解析】

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}\Rightarrow f'''(0)=0$$

(10) 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$________

【答案】 $y=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$，（$c_1,c_2$ 为任意常数）

【解析】齐次特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1+\sqrt{2}i$

故通解为 $e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

(11) 若曲线积分 $\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\right\}$ 内与路径无关，则

$a=$________

【答案】 $a=1$

【解析】 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$，由积分与路径无关知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow a=-1$

(12) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$_______

【答案】 $s(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩

为________________

【答案】2

【解析】由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，可知矩阵$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可逆，故

$r\left(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3\right)=r\left(A\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\right)=r\left(A\right)$再由$r\left(A\right)=2$得$r\left(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3\right)=2$

（14）设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，

则$EX=$________

【答案】2

【解析】$F'(x)=0.5\varphi(x)+\frac{0.5}{2}\varphi(\frac{x-4}{2})$，故$EX=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{0.5}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx$

$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx=EX=0$。令$\frac{x-4}{2}=t$，则$\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-4}{2})dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}\left(4+2t\right)\varphi(t)dt=8\cdot 1+4\int_{-\infty}^{+\infty}t\varphi(t)dt=8$

因此$E(X)=2$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

设函数$f(u,v)$具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f_1'(1,1),\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=f_{11}''(1,1),$

【解析】

$$y=f(e^x,\cos x)\overset{x=0}{\Rightarrow}y(0)=f(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=\left(f_1^{'}e^x+f_2^{'}\left(-\sin x\right)\right)\Big|_{x=0}=f_1^{'}(1,1)\cdot 1+f_2^{'}(1,1)\cdot 0=f_1^{'}(1,1)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=f_{11}^{"}e^{2x}+f_{12}^{"}e^x(-\sin x)+f_{21}^{"}e^x(-\sin x)+f_{22}^{"}\sin^2 x+f_1^{'}e^x-f_2^{'}\cos x$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}=f_{11}^{"}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$$

结论:

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}=f_1^{'}(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}=f_{11}^{"}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$$

(16)(本题满分 10 分)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\frac{1}{2}(\ln(1+x)\cdot x^2\,\big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx)=\frac{1}{4}$$

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定,求 $y(x)$ 的极值

【答案】极大值为 $y(1)=1$,极小值为 $y(-1)=0$

【解析】

两边求导得:

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0 \qquad (1)$$

令 $y'=0$ 得 $x=\pm 1$

对(1)式两边关于 x 求导得 $\quad 6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+3y''=0 \qquad (2)$

将 $x=\pm 1$ 代入原题给的等式中，得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} or \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$，

将 $x=1, y=1$ 代入（2）得 $y''(1)=-1<0$

将 $x=-1, y=0$ 代入（2）得 $y''(-1)=2>0$

故 $x=1$ 为极大值点，$y(1)=1$；$x=-1$ 为极小值点，$y(-1)=0$

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0, \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(Π) 方程 $f(x)f^{'}(x)+(f^{'}(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【答案】

【解析】

（I）$f(x)$ 二阶导数，$f(1)>0, \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

解：1）由于 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，根据极限的保号性得

$\exists\delta>0, \forall x\in(0,\delta)$ 有 $\frac{f(x)}{x}<0$，即 $f(x)<0$

进而 $\exists x_0\in(0,\delta)$有$f\left(\delta\right)<0$

又由于 $f(x)$ 二阶可导，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必连续

那么 $f(x)$ 在 $[\delta,1]$ 上连续，由 $f(\delta)<0, f(1)>0$ 根据零点定理得：

至少存在一点 $\xi\in(\delta,1)$，使 $f(\xi)=0$，即得证

（II）由（1）可知 $f(0)=0$，$\exists\xi\in(0,1),$使$f(\xi)=0$，令 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $f(0)=f(\xi)=0$

由罗尔定理 $\exists\eta\in(0,\xi),$使$f'(\eta)=0$，则 $F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，

对 $F(x)$ 在 $(0,\eta),(\eta,\xi)$ 分别使用罗尔定理：

$\exists\eta_1\in(0,\eta),\eta_2\in(\eta,\xi)$ 且 $\eta_1,\eta_2\in(0,1),\eta_1\neq\eta_2$，使得 $F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$，即

$F'(x)=f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在 $(0,1)$ 至少有两个不同实根。

得证。

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。记圆锥面与柱面的交线为 C

(I) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(Π) 求 S 的 M 质量。

【答案】64

【解析】

（1）由题设条件知，C 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=2x$

则 C 在 xoy 平面的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$

（2）

$$m=\iint_s \mu(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})dS=\iint_s 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=\iint_{D:x^2+y^2\le 2x} 9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=64$$

（20）（本题满分 11 分）设 3 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$。

(I) 证明 $r(A)=2$；

(Π) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

【答案】(I）略；(II）通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

【解析】

（I）证明：由$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$可得$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

因此，$|A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3|=0$，即 A 的特征值必有 0。

又因为 A 有三个不同的特征值，则三个特征值中只有 1 个 0，另外两个非 0.

且由于 A 必可相似对角化，则可设其对角矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0\end{pmatrix},\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2$

（II）由（1）$r(A)=2$，知$3-r(A)=1$，即$Ax=0$的基础解系只有 1 个解向量，

由$\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$可得$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，则$Ax=0$的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

又$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，即$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，则$Ax=\beta$的一个特解为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

综上，$Ax=\beta$的通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（21）（本题满分 11 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换$X=QY$下的标准型$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$

【答案】$a=2;Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, f \xlongequal{x=Qy} -3y_1^2+6y_2^2$

【解析】

$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，其中 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$

由于 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$ 经正交变换后，得到的标准形为 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$，

故 $r(A)=2 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow a=2$，

将 $a=2$ 代入，满足 $r(A)=2$，因此 $a=2$ 符合题意，此时 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则

$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=6$，

由 $(-3E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值-3 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

由 $(6E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 6 的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

由 $(0E-A)x=0$，可得 A 的属于特征值 0 的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -3 & & \\ & 6 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$，由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 彼此正交，故只需单位化即可：

$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，，

则$Q=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3 & & \\ & 6 & \\ & & 0\end{pmatrix}$

$f\overset{x=Qy}{=}-3y_1^2+6y_2^2$

（22）（本题满分 11 分）设随机变量X,Y相互独立，且X的概率分布为$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$的概率密度为$f(y)=\begin{cases}2y,\ 0<y<1\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$

(I) 求$P(Y\le EY)$

(Π) 求$Z=X+Y$的概率密度。

【答案】$\text{(I)}P\{Y\le EY\}=\frac{4}{9};\text{(II)}f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ z-2, & 2<z<3\end{cases}$

【解析】

$\text{(I)}E(Y)=\int_0^1 y2ydy=\frac{2}{3}$

$P(Y\le EY)=P(Y\le\frac{2}{3})=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$

$(\Pi)F_z(Z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$=P(X+Y\le z,X=0)+P(X+Y\le z,X=2)$

$=P(Y\le z,X=0)+P(Y\le z-2,X=2)$

$=\frac{1}{2}P(Y\le z)+\frac{1}{2}P(Y\le z-2)$

（1） 当$z<0,z-2<0$，而$z<0$，则$F_z(Z)=0$

（2） 当$z-2\ge1,z>1,$即$z\ge3$时，$F_z(Z)=1$

(3) 当$0\le z<1$时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}z^2$

(4) 当$1\le z<2$时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}$

(5) 当$2\le z<3$时，$F_z(Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$

所以综上$F_z(Z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}z^2, 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, 1\le z<2\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2, 2\le z<3\\ 1,\ z\ge 3\end{cases}$

所以$f_z(Z)=\left[F_z(Z)\right]'=\begin{cases}z & 0<z<1\\ z-2 & 2<z<3\end{cases}$

(23)(本题满分 11 分) 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做n次测量，该物体的质量μ是已知的，设n次测量结果$X_1,X_2\cdots X_n$相互独立且均服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是n次测量的绝对误差$Z_i=\left|X_i-\mu\right|(i=1,2,\cdots n)$，利用$Z_1,Z_2\cdots Z_n$估计$\sigma$。

(I) 求Z_i的概率密度;

(Π) 利用一阶矩求σ的矩估计量

【答案】

$(I)f_{Z_i}(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & 其他\end{cases};$

(II)矩估计$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|$;

(III)最大似然估计：$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$

【解析】(I)$F_{z_i}(z)=P(Z_i\le z)=P(|X_i-\mu|\le z)$

当$z<0,F_{z_i}(z)=0$

当$z\ge 0,F_{z_i}(z)=P(-z\le X_i-\mu\le z)=P(\mu-z\le X_i\le \mu+z)=F_X(\mu+z)-F(\mu-z)$

当$z\ge 0$时，

$$\therefore f_{z_i}(z)=\left(F_{z_i}(z)\right)'=f_x(\mu+z)+f_x(\mu-z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

综上$f_{z_i}(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}},z>0\\0\ ,z\le 0\end{cases}$

$$(\Pi)E\left(Z_i\right)=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz^2$$

$$=\frac{-2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}d(-\frac{z^2}{2\sigma^2})=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

令$E(Z_i)=\overline{Z}$　　　　$\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

由此可得σ的矩估计量$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$

对总体X的n个样本$X_1,X_2,\cdots X_n$，则相交的绝对误差的样本$Z_1,Z_2,\cdots Z_n,Z_i=|x_i-u|,i=1,2...n,$令其样本值为$Z_1,Z_2,\cdots Z_n,Z_i=|x_i-u|$

则对应的似然函数$L(\sigma)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}{2\sigma^2}},Z_1,Z_2,\cdots Z_n>0\\0\ ,\text{其他}\end{cases}$

两边取对数，当$Z_1,Z_2,\cdots Z_n>0$时

$$\ln L(\sigma)=n\ln\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$$

令$\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\dfrac{n}{u}+\dfrac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=0$

所以，$\widehat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2}$为所求的最大似然估计。