2018 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试卷

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的。

1、下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$　　（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

（C）$f(x)=\cos|x|$　　（D）$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】:（D）

【分析】因为

对选项（A），$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0}x=0=f'(0)$

对选项(B)，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}=0=f'(0)$

（无穷小乘以有界量）

对选项（C），$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}|x|^2}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}x=0=f'(0)$

对选项（D），$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{|x|}^2}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$ 不存在

因此选择（D）

2、过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$，且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为（　　）

（A）$z=0$ 与 $x+y-z=1$　　（B）$z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

（C）$y=x$ 与 $x+y-z=1$　　（D）$y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

【答案】:（B）

【分析】设切点坐标为 (x,y,z)，则法向量为 $\{2x,2y,-1\}$，故切平面的方程为 $2x(X-x)+2y(Y-y)-(Z-z)=0$，因为平面过点 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,0)$，故法向量与向量 $\{1,-1,0\}$ 垂直，因此有 $2x-2y=0$，即 $y=x$ ………………………………①

将 $y=x$ 带入 $z=x^2+y^2$ 中，有 $z=2x^2$ ………………………………②

将点 $(1,0,0)$ 带入平面方程有 $2x-2x^2-2y^2+z=0$ ………………………………③

由①②③可得 $x=0, y=0, z=0$ 或者 $x=1, y=1, z=2$

带回 $2x(X-x)+2y(Y-y)-(Z-z)=0$ 中，可确定平面方程为

$Z=0$ 或者 $2X+2Y-Z=2$。

因此选择（B）

3、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　　）

（A）$\sin 1+\cos 1$　　　　（B）$2\sin 1+\cos 1$

（C）$3\sin 1+\cos 1$　　　　（D）$3\sin 1+2\cos 1$

【答案】:（B）

【分析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1+2}{(2n+1)!}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$

$$=\cos 1+2\sin 1$$

因此选择（B）

4、设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则（　　）

（A）$M>N>K$　　　　（B）$M>K>N$

（C）$K>M>N$　　　　（D）$K>N>M$

【答案】:（C）

【分析】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx$

对于 $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$，因为 $e^x>1+x$，所以 $\dfrac{1+x}{e^x}<1$，故 $N<M$

对于 $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，因为 $1+\sqrt{\cos x}>1$，故 $K>M$

因此 $K>M>N$

因此选择（C）

5、下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

【答案】:（A）

【分析】对于$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$(E-A)^3=0$

对于（A）：$(E-A)^3=0$；对于（B）：$(E-A)^2=0$

对于（C）：$(E-A)^2=0$；对于（D）：$(E-A)^2=0$

（若两矩阵相似，要求它们的最小多项式相同）

因此选择（A）

6、设A,B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，$(X\ \ Y)$表示分块矩阵，则（　　）

（A）$r(A\quad AB)=r(A)$　　　　（B）$r(A\quad BA)=r(A)$

（C）$r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　（D）$r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

【答案】:（A）

【分析】因为AB的每一列可以由A的列向量组线性表出，因此$r(A\quad AB)=r(A)$

因此选择（A）

7、设$f(x)$为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则$P\{X<0\}=$（　　）

（A）0.2　　（B）0.3　　（C）0.4　　（D）0.6

【答案】:（A）

【分析】因为$f(1+x)=f(1-x)$，所以说明$f(x)$以$x=1$为对称轴，因此$P\{X<1\}=\frac{1}{2}$，

又因为$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，故由对称性可知$P\{0<X<1\}=0.3$，

故$P\{X<0\}=P\{X<1\}-P\{0<X<1\}=0.5-0.3=0.2$

因此选择（A）

8、给定总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2已知，给定样本$X_1,X_2,\ \ ,X_n$，对总体均值μ进行检验，

令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则（　　）

（A）若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 H_0

（B）若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0

（C）若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时接受 H_0

（D）若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0

【答案】:（D）

【分析】因为显著性水平 $\alpha=0.05$ 的拒绝域为 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.025}$，而显著性水平 $\alpha=0.01$ 的拒绝域为 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.005}$，而 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.005}$ 是 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.025}$ 的子区间，因此要是落在拒绝域 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.005}$ 中，就一定会落在拒绝域 $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{0.025}$ 中，也就是说在显著性水平 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0，则在 $\alpha=0.05$ 时也拒绝 H_0，反之，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则在 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0

因此选择（D）

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

9、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 $k=$____________。

【答案】：-2

【分析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{kx}\left(\frac{1-\tan x-1-\tan x}{1+\tan x}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{kx}\cdot\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}=e^{-\frac{2}{k}}=e$$

所以 $k=-2$

因此填写 -2

10、设曲线 $y=f(x)$ 的图像过点 $(0,0)$，且与曲线 $y=2^x$ 相切于 $(1,2)$，则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$__________。

【答案】：$2\ln 2-2$

【分析】由已知可得 $f(0)=0$， $f(1)=2$， $f'(1)=2\ln 2$

$$\int_0^1 xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)dx$$

$$= f'(1)-(f(1)-f(0)) = 2\ln 2 - 2$$

因此填写 $2\ln 2-2$

11、设向量场 $F(x,y,z)=xyi-yzj+xzk$，则 $rotF\,|_{(1,1,0)}=$________。

【答案】：$i-k$ 或者 $\{1,0,-1\}$

【分析】$rotF\,|_{(1,1,0)}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & xz \end{vmatrix}_{(1,1,0)} = (yi-zj-xk)\Big|_{(1,1,0)} = i-k$

因此填写 $i-k$ 或者 $\{1,0,-1\}$

12、曲线 S 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\int_S xyds=$________。

【答案】：$-\dfrac{1}{3}\pi$

【分析】由于积分曲线对 x,y,z 具有轮换性，

因此 $\int_S xyds = \int_S yzds = \int_S zxds$

又因为 $\int_S (xy+yz+zx)ds = \dfrac{1}{2}\int_S (x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 ds$

$= \dfrac{1}{2}\int_S -1ds = -\dfrac{1}{2}\int_S 1ds = -\dfrac{1}{2}$乘以曲线的长度

因为两者交线为球的大圆，因此 $\int_S (xy+yz+zx)ds = -\dfrac{1}{2}\cdot 2\pi = -\pi$

因此所求 $\int_S xyds = -\dfrac{1}{3}\pi$

因此填写 $-\dfrac{1}{3}\pi$

13、设二阶方阵 A 有两个不同特征值，二维列向量 α_1 和 α_2 是 A 的线性无关的特征向量，且 $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$，则 $|A|=$________。

【答案】：-1

【分析】由于 $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$，因此说明 1 为 A^2 的特征值，因此若 A 的特征值为 λ，则有 $\lambda^2=1$，因此 A 的特征值为 1 和 -1，故 $|A|=-1$

因此填写 -1

14、设随机事件 A,B 相互独立，A,C 相互独立，且 $BC=\phi$，已知 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AC\mid AB\quad C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$________。

【答案】：$\dfrac{1}{4}$

【分析】$P(AC\mid AB\quad C)=\dfrac{P(AC\quad (AB\quad C))}{P(AB\quad C)}=\dfrac{P((AC\quad AB)\quad (AC\quad C))}{P(AB\quad C)}$

$$=\frac{P(ABC\quad AC)}{P(AB\quad C)}=\frac{P(AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}=\frac{1}{4}$$

解之可得 $P(C)=\dfrac{1}{4}$

因此填写 $\dfrac{1}{4}$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15、（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$。

【分析与解答】本题是不定积分的计算题，用换元法和分部积分法来求解

令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $e^x=1+t^2$，$e^x dx=2tdt$

则原不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

$$=\int 2t(1+t^2)\arctan tdt$$

$$=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\int\frac{1}{2}(1+t^2)^2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}\int 1+t^2dt$$

$$=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}[t+\frac{1}{3}t^3]+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}[\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}]+C$$

16、（本题满分 10 分）

将长为 2 米的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值。

【分析与解答】本题是条件下球最值的问题，需要自己建立目标函数以及条件函数

设圆的面积为$S_1=\pi x^2$，对应的周长为$2\pi x$

设正方形的面积为$S_2=y^2$，对应的周长为$4y$

设三角形的面积为$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$，对应的周长为$3z$

则目标函数为$S=S_1+S_2+S_3=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$，条件函数为$2\pi x+4y+3z=2$，

令$L=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$

则$\begin{cases} L'_x=2\pi x+2\pi\lambda=0 \\ L'_y=2y+4\lambda=0 \\ L'_z=\frac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0 \\ 2\pi x+4y+3z-2=0 \end{cases}$ 解之可得$x=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$y=\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}}$，$z=\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

此时$S=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

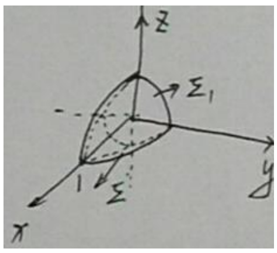
17、（本题满分 10 分）

设有空间曲面$\Sigma: x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$，其方向与$x$轴的正方向的夹角为锐角，求

$$\iint_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$$

【分析与解答】本题是第二类曲面积分的计算问题，通过补面利用高斯公式求解，在三重积分部分需要采用的是柱面坐标求解。

补面$\Sigma_1:\begin{cases} x=0 \\ y^2+z^2=\frac{1}{3} \end{cases}$，方向向后，如图所示。



则$\iint_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy-\iint_{\Sigma_1} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}dr\int_0^{\sqrt{1-3r^2}}(1+3r^2)rdx$$

$$=\frac{14}{45}\pi$$

18、（本题满分 10 分）

设一阶常微分方程 $y'+y=f(x)$

（1）当 $f(x)=x$ 时，求该微分方程的通解；

（2）当 $f(x)$ 为周期函数时，证明该微分方程有通解与其对应，并且该通解也为周期函数。

【分析与解答】本题是一阶线性微分方程的求解问题，以及函数的周期性的证明。

（1）解方程 $y'+y=x$，

则 $y(x)=e^{-x}\left[\int xe^{x}dx+C\right]=e^{-x}\left[(x-1)e^{x}+C\right]=x-1+Ce^{-x}$

（2）已知 $f(x+T)=f(x)$，T 为周期

则 $y'+y=f(x)$ 的通解为 $y(x)=e^{-x}\left[\int_0^x f(x)e^{x}dx+C\right]$

$$
\begin{aligned}
\text{则 } y(x+T)&=e^{-x-T}\left[\int_0^{x+T} f(x)e^{x}dx+C\right]\\
&=e^{-x}\left[\int_0^{x+T} f(x)e^{x-T}dx+Ce^{-T}\right]\\
&=e^{-x}\left[\int_{-T}^{x} f(u+T)e^{u}du+Ce^{-T}\right](\text{令}x-T=u)\\
&=e^{-x}\left[\int_0^{x} f(u)e^{u}du+\int_{-T}^{0} f(u)e^{u}du+Ce^{-T}\right](\text{这里}\int_{-T}^{0} f(u)e^{u}du+Ce^{-T}\text{ 也是一个常数})
\end{aligned}
$$

所以 $y(x+T)$ 也原方程的解。

19、（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\ (n=1,2,\quad)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

【分析与解答】本题考查的是递推数列的极限存在证明与求解的问题，将 x_{n+1} 的形式或者

$e^{x_{n+1}}$ 解出本题即可求解

因为 $x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$，故数列 $\{x_n\}$ 的每一项都是正的。

又 $e^{x_{n+1}}-e^{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-e^{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-1-x_ne^{x_n}}{x_n}$

令 $f(x)=e^{x}-1-xe^{x}(x>0)$

$f'(x)=-xe^{x}<0(x>0)$

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，又 $f(0)=0$

所以 $f(x)<0(x>0)$，即 $e^{x_n}-1-x_ne^{x_n}<0$

因此 $e^{x_{n+1}}-e^{x_n}<0$，所以有 $x_{n+1}<x_n$，数列 $\{x_n\}$ 单调减少，有下界 $x=0$

故 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ne^{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x_n}-1)$，即 $Ae^A=e^A-1$，也就是 $f(A)=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=0$

20、（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数。

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形。

【分析与解答】本题第一问的本质考察的是线性方程组的解的问题，第二问求标准形之后再求规范形

（1）由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 可得 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases}$

则 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$

当 $a\neq 2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

当 $a=2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k\\-k\\k\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数

（2）当 $a\neq 2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形为 $z_1^2+z_2^2+z_3^2$

当 $a=2$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$

$$=2(x_2-\frac{1}{2}x_1)^2+6(x_3+\frac{1}{2}x_1)^2$$

令$\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(x_2-\frac{1}{2}x_1) \\ z_2=\sqrt{6}(x_3+\frac{1}{2}x_1) \\ z_3=\frac{1}{2}x_1 \end{cases}$，则化原二次型为规范形 $z_1^2+z_2^2$

21、（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

（1）求 a；

（2）求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P。

【分析与解答】本题考察的是矩阵的初等变换及其在矩阵的左侧或者右侧乘时对矩阵的影响，同时本题需要利用近几年常考的矩阵方程来求解

$$\left(A \mid B\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & a & 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -a & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3a & 3 & 3a-2 & 4 \\ 0 & 1 & -a & -1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right)$$

矩阵 A 经初等列变换化为矩阵 B，说明矩阵方程 $AX=B$ 有解。

（1）因为 $r(A)=r(A|B)$，所以 $a=2$

（2）$\left(A \mid B\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

所以 $AX=B$ 的全部解为 $X=\begin{pmatrix} 3-6k_1 & 3-6k_2 & 3-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$，$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数

其中可逆矩阵是全部解中一部分，要求 $|X|=k_3-k_2\neq 0$

所以 $P=\begin{pmatrix} 3-6k_1 & 3-6k_2 & 3-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数并且 $k_2\neq k_3$。

22、（本题满分 11 分）

已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$，$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布，设 $Z=XY$。

（1）求 $Cov(X,Z)$；

（2）求 Z 的分布律。

【分析与解答】本题考察的是两个独立的离散型随机变量的相关问题，本题的第二问需要用全概率公式求解

（1）$Cov(X,Z)=Cov(X,XY)$

$$=E(XXY)-EXE(XY)=E(X^2Y)-EXE(XY)$$

因为 X,Y 相互独立

所以 $E(X^2Y)-EXE(XY)=E(X^2)EY-(EX)^2EY=[E(X^2)-(EX)^2]EY$

其中 $E(X^2)=1$，$E(X)=0$，$E(Y)=\lambda$

所以 $Cov(X,Z)=\lambda$

（2）Z 的取值为全部的整数

$$P\{Z=n\}=P\{Z=n,X=1\}+P\{Z=n,X=-1\}$$

$$=P\{Y=n,X=1\}+P\{Y=-n,X=-1\}$$

$$=P\{Y=n\}P\{X=1\}+P\{Y=-n\}P\{X=-1\}$$

$$=\frac{1}{2}(P\{Y=n\}+P\{Y=-n\})$$

当 $n>0$ 时，$P\{Y=n\}=\frac{\lambda^{-n}}{n!}e^{-\lambda}$，$P\{Y=-n\}=0$

此时 $P\{Z=n\}=\frac{1}{2}P\{Y=n\}=\frac{\lambda^{-n}}{2\cdot n!}e^{-\lambda}$

当 $n<0$ 时，$P\{Y=-n\}=\frac{\lambda^{n}}{(-n)!}e^{-\lambda}$，$P\{Y=n\}=0$

此时 $P\{Z=n\}=\frac{1}{2}P\{Y=-n\}=\frac{\lambda^{n}}{2\cdot(-n)!}e^{-\lambda}$

当 $n=0$ 时，$P\{Z=0\}=\frac{1}{2}(P\{Y=0\}+P\{Y=0\})=P\{Y=0\}=e^{-\lambda}$

23、已知总体 X 的密度函数为 $f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，$-\infty<x<+\infty$，设 $X_1,X_2,\quad,X_n$ 为来总体 X 的简单随机样本，σ 为大于零的参数，σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$。

（1）求 $\hat{\sigma}$；（2）求 $E\hat{\sigma},D\hat{\sigma}$。

【分析与解答】本题考察的最大似然估计，并求解其数字特征

（1）设简单随机样本 $X_1, X_2, \quad, X_n$ 对应的样本值为 $x_1, x_2, \quad, x_n$

则最大似然函数为 $L(\sigma)=\dfrac{1}{2^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$

取对数可得 $\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

求导数可得 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$

令 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$，可得 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

（2）$E\hat{\sigma}=E\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx$

$=\int_{0}^{+\infty}x\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\sigma$

$D\hat{\sigma}=D\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|=\dfrac{1}{n}D|X|=\dfrac{1}{n}(E|X|^2-(E|X|)^2)$

因为 $E|X|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$

所以 $D\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}(2\sigma^2-\sigma^2)=\dfrac{1}{n}\sigma^2$