2016年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题及解答

本文档仅供学习交流之用. 试题来源于网络, 解答由孟庆鑫提供, 个人观点仅供参考.

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 [C]

(A) $a<1$ 且 $b>1$.　　(B) $a>1$ 且 $b>1$.

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$.　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 [D]

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

3. 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解, 则 $q(x)=$ [A]

(A) $3x(1+x^2)$.　　(B) $-3x(1+x^2)$.　　(C) $\frac{x}{(1+x^2)}$.　　(D) $-\frac{x}{(1+x^2)}$.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则 [D]

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

5. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 [C]

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 [B]

(A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面. (D) 柱面.

7. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leqslant \mu + \sigma^2\}$, 则 [B]

(A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.

8. 设随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做两次, X 表示两次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为 [A]

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $-\dfrac{1}{2}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2} = \underline{\frac{1}{2}}$.

10. 向量场 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x+y+z)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A} = \underline{\boldsymbol{j} + (y-1)\boldsymbol{k}}$.

11. 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)} = \underline{-\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y}$.

12. 设函数 $f(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+ax^2}$, 且 $f''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\frac{1}{2}}$.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4}$.

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\overline{X} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\underline{(8.2, 10.8)}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leqslant r \leqslant 2(1+\cos\theta),\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \right\}$,

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　换成极坐标计算,

$$\begin{aligned}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r\cos\theta \cdot r\,\mathrm{d}r \\ &= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta + \cos^3\theta + \frac{1}{3}\cos^4\theta\right)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 16\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{32}{3} + 5\pi.\end{aligned}$$

□

16.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

（I）证明: 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

（II）若 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

（I）证　$y'' + 2y' + ky = 0,\ 0 < k < 1 \Rightarrow y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$,

其中 C_1, C_2 是任意常数, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ 是特征方程的两个根 $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

（II）解　$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}\right)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 1}{\lambda_1\lambda_2} = \frac{3}{k}.$$

□

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y + 1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线, 计算曲线积分 $I(t) = \displaystyle\int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

解　$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, $f(0, y) = y + 1 \Rightarrow f(x, y) = xe^{2x-y} + y + 1$,

$I(t) = \displaystyle\int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \int_{L_t} \mathrm{d}f(x, y) = f(1, t) - f(0, 0) = e^{2-t} + t.$

$I'(t) = 1 - e^{2-t} \overset{令}{=} 0 \Rightarrow t = 2$. $I(t)$ 的最小值为 3.

□

18.（本题满分 10 分）

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　利用 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma}(x^2+1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+1)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)+\frac{\partial}{\partial z}(3z)\right)\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_{\Omega}(2x+1)\,\mathrm{d}V\,,
\end{aligned}$$

注意到 $\mathrm{d}V=(1-x)^2\,\mathrm{d}x$，于是 $I=\int_0^1(2x+1)(1-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. □

19.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\,2,\,\cdots)$ 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

(I) 证　利用中值定理有

$$\begin{aligned}
|\,x_{n+1}-x_n\,| &= |\,f(x_n)-f(x_{n-1})\,| \\
&= f'(\xi_{n-1})\ |\,x_n-x_{n-1}\,| && (\xi_{n-1}\text{介于}x_n,\,x_{n-1}\text{之间}) \\
&= f'(\xi_{n-1})\ |\,f(x_{n-1})-f(x_{n-2})\,| \\
&= f'(\xi_{n-1})f'(\xi_{n-2})\ |\,x_{n-1}-x_{n-2}\,| && (\xi_{n-2}\text{介于}x_{n-1},\,x_{n-2}\text{之间}) \\
&= \cdots \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1}f'(\xi_i)\right)|\,x_2-x_1\,| && (\xi_i\text{介于}x_{i+1},\,x_i\text{之间}) \\
&< |\,x_2-x_1\,|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && (1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(II) 证　$F(x)\overset{令}{=}f(x)-x$，$F'(x)=f'(x)-1\in(-1,\,-\frac{1}{2})\Rightarrow F(x)$ 严格递减，　(2)

$f(0)=1,\,0<f'(x)<\frac{1}{2}\overset{\int_0^x}{\Longrightarrow}1<f(x)<\frac{1}{2}x+1\ (x>0)\ \Rightarrow F(1)>0,\ F(2)<0$

$\Rightarrow\exists\xi\in(1,\,2)$，使得 $F(\xi)=0$.　(3)

由 (1) 式知，当 $n\to\infty$ 时，$x_{n+1}-x_n\to 0$，即 $F(x_n)\to 0$. 结合 (2) (3) 式知 $x_n\to\xi$.

即 $\lim_{n\to\infty}x_n\in(1,\,2)\subset(0,\,2)$. □

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$,

当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时, 求此方程.

解 $$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{array}\right)$$

当 $a=-2$ 时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解;

当 $a=1$ 时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&3\\-C_1-1&-C_2-1\\C_1&C_2\end{pmatrix}$, $\forall C_1, C_2\in\mathbb{R}$;

当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时, 方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$. □

21.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(I) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(II) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(I) 解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$, $\lambda_1=-2$ 对应的特征向量为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$, $\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{令}{=}\boldsymbol{\Lambda}$,

$$\boldsymbol{A}^{99}=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^{99}=\boldsymbol{P\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(II) 解 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{BA}^{99}$, 即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(-2+2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.$$ □

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{\,(x, y) \mid 0 < x < 1,\ x^2 < y < \sqrt{x}\,\}$ 上服从均匀分布，令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leqslant Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(Ⅰ) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(Ⅱ) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(Ⅲ) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(Ⅰ) 解 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\iint_D \mathrm{d}\sigma}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅱ) 解 设 $0 < a, b < 1$, 则 $P\{\,U \leqslant a,\ X \leqslant b\,\} = P\{\,X > Y,\ X \leqslant b\,\} = \dfrac{3}{2}b^2 - b^3$,

$P\{\,U \leqslant a\,\} = P\{\,X > Y\,\} = \dfrac{1}{2}$, $P\{\,X \leqslant b\,\} = 2\,b^{\frac{3}{2}} - b^3$,

$P\{\,U \leqslant a,\ X \leqslant b\,\} \neq P\{\,U \leqslant a\,\} \cdot P\{\,X \leqslant b\,\}$, 即 U 与 X 不独立.

(Ⅲ) 解 $F(z) = P\{\,U + X \leqslant z\,\} = P\{\,U + X \leqslant z,\ U = 0\,\} + P\{\,U + X \leqslant z,\ U = 1\,\}$

$$= P\{\,X \leqslant z,\ X > Y\,\} + P\{\,1 + X \leqslant z,\ X \leqslant Y\,\}$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & z \geqslant 1 \end{cases} + \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 2\,(z-1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ \dfrac{1}{2}, & z \geqslant 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leqslant z < 1, \\ \dfrac{1}{2} + 2\,(z-1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2. \end{cases}$$ □

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为来自该总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(Ⅰ) 求 T 的概率密度;

(Ⅱ) 确定 a, 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

(Ⅰ) 解 $F_T(t)=P\{T\leqslant t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\leqslant t\}=(P\{X_1\leqslant t\})^3$

即 $F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \left(\displaystyle\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}\,\mathrm{d}\theta\right)^3, & 0\leqslant z<\theta,\\ 1, & t\geqslant\theta\end{cases}\Rightarrow f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<z<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(Ⅱ) 解 $EaT=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}a\,t\,f_T(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{令}}{=}\theta\Rightarrow a=\frac{10}{9}.$ □