

2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$

- (A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 4.

【答案】C

【解析】 $x - \tan x = x - (x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) \sim -\frac{1}{3}x^3$, 故 $k = 3$.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的

- A. 可导点，极值点. B. 不可导点，极值点.
C. 可导点，非极值点. D. 不可导点，非极值点.

【答案】B

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x|x|}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = -\infty$, 故 $f(x)$ 不可导.

当 $x > 0$ 时， $f(x) < 0$; 当 $x < 0$ 时， $f(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极大值. 故选 (B).

(3) 设 $\{u_n\}$ 是单调递增的有界数列，则下列级数中收敛的是

- A. $\sum_{n=1}^m \frac{u_n}{n}$. B. $\sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{1}{u_n}$.
C. $\sum_{n=1}^m (1 - \frac{u_n}{u_{n+1}})$. D. $\sum_{n=1}^m (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

【答案】C

【解析】举反例：(A) $u_n = \frac{n-1}{n}$ (B) $u_n = \frac{n-1}{n}$ (C) $u_n = -\frac{1}{n}$

(4) 设函数 $Q(x, y) = \frac{x}{y^2}$. 如果上半平面 ($y > 0$) 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, 那么函数 $P(x, y)$ 可取为

A. $y - \frac{x^2}{y^3}$.

B. $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$.

C. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

D. $x - \frac{1}{y}$.

【答案】D

【解析】 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$, 又上半平面含 $\frac{1}{x}$, 有零, 故 (C) 错, 选 (D).

(5) 设 A 是 3 阶实对称矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为

A. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

B. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

C. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

D. $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

【答案】C

【解析】 $\because A^2 + A = 2E$, 设 A 的特征值为 λ

$$\therefore \lambda^2 + \lambda = 2$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\therefore \lambda = -2 \text{ 或 } 1$$

$$\because |A| = 4$$

$$\therefore A \text{ 的特征值为 } \lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 \therefore q = 2, p = 1$$

$$\therefore X^T Ax \text{ 的规范形为 } y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

(6) 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程 $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + d_i (i=1,2,3)$

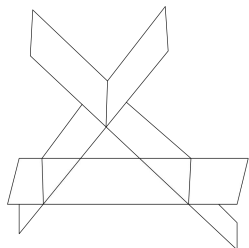
组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 A, \bar{A} , 则

A. $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$

B. $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 2$

C. $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$

D. $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 1$



【答案】C

【解析】(1) 令 $\pi_i = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = d_i, i = 1, 2, 3$

由于 π_1, π_2, π_3 无公共交点, 则 $r(A) < r(\bar{A})$, 故 B、D 排除

(2) 由 (1) 分析可知, $r(A) \leq 2$, 且 $A \neq 0$, 则 $1 \leq r(A) \leq 2$

以 π_1 和 π_2 为例, 由于 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \end{cases}$ 的公共解为一条直线

$$\text{则 } 3 - r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = 1$$

$$\text{即 } r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{因此 } r(A) = r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 2. \quad r(\bar{A}) = 3$$

综上 A 正确

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

B. $P(AB) = P(A)P(B)$

C. $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$

D. $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$

【答案】C

【解析】A选项 $\Leftrightarrow P(AB) = 0$, 故 A 排除

B选项 $\Leftrightarrow A, B$ 独立, 故 B 排除

C选项 $\Leftrightarrow P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$

而 $P(A) = P(B)$, 故 C 正确

D选项 $\Leftrightarrow P(AB) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$

$\Leftrightarrow 1 = P(A) + P(B)$ 故 D 排除

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 则 $P\{|X - Y| < 1\}$

A. 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关.

B. 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

C. 与 μ, σ^2 都有关.

D. 与 μ, σ^2 都无关.

【答案】A

【解析】 X, Y 独立, 服从正态分布, 则 $z = x - y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$

$$\begin{aligned} P(|X - Y| < 1) &= P(-1 < Z < 1) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} < \frac{Z}{\sqrt{2}\sigma} < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1, \text{ 故 A 正确} \end{aligned}$$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(u)$ 可导, $z = f(\sin y - \sin x) + xy$, 则 $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____

【答案】 $\frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y}$

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(\sin y - \sin x)(-\cos x) + y$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(\sin y - \sin x)\cos y + x$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} &= -f'(\sin y - \sin x) + \frac{y}{\cos x} + f'(\sin y - \sin x) + \frac{x}{\cos y} \\ &= \frac{y}{\cos x} + \frac{x}{\cos y} \end{aligned}$$

(10) 微分方程 $2yy^2 - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解 $y =$ _____

【答案】 $y = \sqrt{3e^x - 2}$

【解析】 $y' = \frac{2 + y^2}{2y}$

$$\int \frac{2y}{2 + y^2} dy = \int 1 dx \text{ 故 } \ln(2 + y^2) = x + C.$$

由 $y(0) = 1$ 得 $C = \ln 3$

则 $\ln(2 + y^2) = x + \ln 3$. 故 $e^{\ln(2 + y^2)} = e^{x + \ln 3}$

即 $2 + y^2 = 3e^x$ 故 $y = \sqrt{3e^x - 2}$

(11) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____

【答案】 $\cos \sqrt{x}$

【解析】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \cos \sqrt{x}$

(12) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4 (z \geq 0)$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy =$ _____

【答案】 $\frac{32}{3}$

【解析】

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sqrt{4 - x^2 - 4z^2} dx dy &= \iint_{D_{xy}} |y| dx dy = 4 \iint_{D'} y dx dy = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 \sin \theta dr = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(13) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为三阶矩阵, 若 α_1, α_2 线性无关, 且 $\alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$ 。则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____

【答案】 $x = k(1, -2, 1)^T, k \in R$

【解析】 $\because d_1, d_2$ 无关, $A = (d_1, d_2, d_3)$

$$\therefore r(A) \geq 2$$

$$\because d_3 = -d_1 + 2d_2$$

$$\therefore r(A) = 2$$

$\therefore Ax = 0$ 的基础解系中有 $n - r(A) = 3 - 2 = 1$ 个解向量.

$$\because d_1 - 2d_2 + d_3 = 0$$

$\therefore (1, -2, 1)^T$ 为 $Ax = 0$ 的解为基础解系.

\therefore 通解为 $x = k(1, -2, 1)^T, k \in R$

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, EX 为

x 的数学期望, 则 $P\{F(X) > EX - 1\} =$ _____

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6} x^3 \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{2} dt & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(F(x) > E(x) - 1) &= P(F(x) > \frac{1}{3}) \\ &= P\left(\frac{x^2}{4} > \frac{1}{3}\right) = P\left(x > \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$

(2) 求曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点

【答案】(1) $y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ (2) $(-\infty, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$ 函数 $y(x)$ 是凸的, 在 $(-\sqrt{3}, 0)$,

$(\sqrt{3}, +\infty)$ 函数 $y(x)$ 是凹的, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}), (0, 0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ 为拐点

【解析】(1)

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int x dx} \left(\int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\int x dx} dx + c \right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx + c \right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} (x + c) \end{aligned}$$

由 $y(0) = 0$, 得 $c = 0$, 故 $y(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

(2)

$$y'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y''(x) = -2xe^{-\frac{x^2}{2}} + (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)$$

$$= (-2x - x + x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

列表

y	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y''	-	0	+	0	-	0	+
y	凸		凹		凸		凹

故在 $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(0, \sqrt{3})$ 函数 $y(x)$ 是凸的, 在 $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, +\infty)$ 函数 $y(x)$ 是凹的, 由

$y(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$, $y(\sqrt{3}) = \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}$, $y(0) = 0$, 由拐点判别定理得

$(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ 为拐点。

(16) (本题满分 10 分) 设 a, b 为实数, 函数 $z = 2 + ax^2 + by^2$ 在点 $(3, 4)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l = -3i - 4j$ 的方向导数最大, 最大值为 10.

(1) 求 a, b ;

(2) 求曲面 $z = 2 + ax^2 + by^2$ ($z \geq 0$) 的面积;

【答案】 (1) $a = b = -1$ (2) $\frac{13}{3}\pi$

【解析】 (1) 由题意可知

$$\text{grad}\Big|_{(3,4)} = \{+2ax, 2by\}\Big|_{(3,4)} = \{6a, 8b\}$$

得 $\frac{6a}{-3} = \frac{8b}{-4}$, 得 $a = b$, 且方向导数最大为 $\sqrt{36a^2 + 64b^2} = 10$ (与梯度方向相同, 方向导数最大), 故 $a = b = -1$.

$$Z = 2 - x^2 - y^2$$

(2)

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{\Sigma} 1 ds \\
&= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy \quad D: x^2+y^2 \leq 2 \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} r dr \\
&= \frac{1}{8} 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} d(1+4r^2) \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{6} (27-1) = \frac{26\pi}{6} = \frac{13}{3} \pi
\end{aligned}$$

(17) (本题满分 10 分) 求曲线 $y = e - x \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积

【答案】

【解析】 所求面积 $A = \int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin x| dx$ 。

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin x| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \left[e^{-(k+1)\pi} (-1)^{k+1} - e^{-k\pi} (-1)^k \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n e^{-k\pi} + e^{-(n+1)\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{e^{\pi} - 1} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\pi} - 1}
\end{aligned}$$

(18) (本题满分 10 分) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n=1, 2, 3, \dots)$

(1) 证明: $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2, 3, \dots)$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

【答案】(1) $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,\dots)$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为奇}) \\ \frac{2}{\pi} & (n \text{ 为偶}) \end{cases}$

【解析】 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

(1) 令 $x = \sin t$, 则

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t (1 - \sin^2 t) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t dt$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{\pi}{2} - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为偶}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3} & (n \text{ 为奇}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为偶}) \\ \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3} & (n \text{ 为奇}) \end{cases}$$

$$n \text{ 为奇数, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3}} = \frac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} < 1;$$

$$n \text{ 为偶数, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+3} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3}} = \frac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)} \cdot \frac{2}{\pi} < 1;$$

故 $\{a_n\}$ 单调减少。

$$n \text{ 为偶数时, } \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{\pi}{2}} = \frac{n-1}{n+2};$$

$$n \text{ 为奇数时, } \frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{\frac{1}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}} = \frac{n-1}{n+2};$$

故 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n=2,3,\dots)$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为奇}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)} \cdot \frac{2}{\pi} & (n \text{ 为偶}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为奇}) \\ \frac{2}{\pi} & (n \text{ 为偶}) \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ 为偶})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2}{\pi} \quad (n \text{ 为奇})$$

(19) (本题满分 10 分) 设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 - (1-z)^2 (0 \leq z \leq 1)$ 与平面 $z < 0$ 围成的椎体, 求 Ω 的形心坐标。

【答案】

【解析】由题意可知, $\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} 1 dv} = 0$, $\bar{y} = \frac{\iiint_{\Omega} y dv}{\iiint_{\Omega} 1 dv} = 0$, $\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} 1 dv} = 0$ 。

$$\iiint_{\Omega} 1 dv = \int_0^1 dt \iint_D 1 dx dy = \int_0^1 \pi(1-z)^2 dz = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{其中 } \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^1 z dz \iint_D 1 dx dy = \int_0^1 \pi z(1-z)^2 dz = \frac{\pi}{12}$$

$$\iiint_{\Omega} y dv = \int_0^1 dz \iint_{x^2+(y-2)^2 \leq (1-z)^2} y dx dy$$

$$\iint_{x^2+(y-2)^2 \leq (1-z)^2} y dx dy = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{1-z} (2+r\sin\theta)r dr$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = 2+r\sin\theta \end{cases}, \text{ 则} &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 + r^3 \frac{\sin\theta}{3} \right) \Big|_0^{1-z} d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((1-z)^2 + \frac{(1-z)^3}{3} \right) \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi(1-z)^2 \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} y dv = \int_0^1 2\pi(1-z)^2 dz = \frac{2\pi}{3} (z-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3};$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = 2, \bar{z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4}, \bar{x} = 0$$

故

(20) (本题满分 11 分) 已知向量组

$$(I)\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a^2+3 \end{bmatrix}, (II)\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a+3 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-a \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{bmatrix},$$

若向量组 (I) 和向量组 (II) 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

【答案】

$$\text{【解析】} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & a^2+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a+3 & 1-a & a^2+3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1-a & a^2-a \end{bmatrix}, \text{所以 } a=1.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 4 & 4 & 4 & | & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}, \text{所以 } \beta_3 = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, k \in R.$$

所以 $\beta_3 = (-k-1)\alpha_1 + k\alpha_2 + 2\alpha_3, k \in R.$

$$(21) \text{ (本题满分 11 分) 已知矩阵 } A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ 与 } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \text{ 相似,}$$

(1) 求 x, y ;

(2) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$;

【答案】(1) $x=3, y=-2$; (2) $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

【解析】(1) $A \sim B \Rightarrow \begin{cases} \text{tr}A = \text{tr}B \\ |A| = |B| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 5 \end{cases}$, 即 $x=3, y=-2$

(2) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B| = 0 \Rightarrow A, B$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=2$ 时, 由 $(2E-A)x=0, (2E-B)x=0$ 可得 A, B 属于特征值 $\lambda_1=2$

的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1, 2, 0)^T, \beta_1=(1, 0, 0)^T$;

当 $\lambda_2=-2$ 时, 由 $(-E-A)x=0, (-E-B)x=0$ 可得 A, B 属于特征值 $\lambda_2=-2$

的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_2=(-2, 1, 0)^T, \beta_2=(-1, 3, 0)^T$;

当 $\lambda_3=-2$ 时, 由 $(-2E-A)x=0, (-2E-B)x=0$ 可得 A, B 属于特征值 $\lambda_3=-2$

的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_3=(-1, 2, 0)^T, \beta_3=(0, 0, 1)^T$;

令 $P_1=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), P_2=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则

$$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$$

故令 $P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, 即 $P^{-1}AP = B$.

(22)(本题满分 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p, P\{Y=1\}=1-p$. 令 $Z=XY$

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(3) X 与 Z 是否相互独立;

【答案】

【解析】(1)

$$F_Z(z) = P(XY \leq z) = P(XY \leq z, Y = -1) + P(XY \leq z, Y = 1)$$

$$= P(-X \leq z)P(Y = -1) + P(X \leq z)P(Y = 1)$$

$$= pP(X \geq -z) + (1-p)P(X \leq z)$$

$$= p(1 - F_X(-z)) + (1-p)F_X(z)$$

$$\text{因为 } f_X(z) = \begin{cases} e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad f_X(-z) = \begin{cases} e^z, & z < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

$$\text{所以 } f_Z(z) = pf_X(-z) + (1-p)f_X(z) \quad f_Z(z) = \begin{cases} (1-p)e^{-z}, & z > 0 \\ pe^z, & z < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) \operatorname{cov}(X, Z) = 0, \operatorname{cov}(X, XY) = 0,$$

$$\text{由于 } \operatorname{cov}(X, XY) = E(X^2Y) - EXEXY = EX^2EY - (EX)^2EY = EYDX,$$

则 $\operatorname{cov}(X, XY) = 1 - 2p$. 由 $1 - 2p = 0$, 可知当 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3) X 与 Z 不独立.

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0 & , x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求 A ;

(2) 求 σ^2 的最大似然估计量;

【解析】(1) 根据概率密度归一性, 有

$$\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\text{设 } \frac{x-\mu}{\sigma} = t, \text{ 则 } \int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{+\infty} A e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} A = 1, \text{ 则 } A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$(2) \text{ 似然函数 } L(\sigma) = \frac{A^n}{\sigma^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ 取对数 } \ln(L(\sigma)) = n \ln A - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

对 σ^2 求导有, $\frac{d(\ln(L(\sigma)))}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0$ 则 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$, 则 σ^2 的最

大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 。