

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是 ()
 (A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

(2) 下列曲线中有渐近线的是 ()
 (A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$
 (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()
 (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
 (C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是 ()
 (A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()
 (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ()

(A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \quad (\quad)$$

(A) $(ad - bc)^2$ (B) $-(ad - bc)^2$

(C) $a^2d^2 - b^2c^2$ (D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

(A) 必要非充分条件

(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 曲线 $r = r(\theta)$ 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{设平面区域 } D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}, \text{ 计算 } \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy.$$

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 的区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

$$(I) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b],$$

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

(20) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$, 定义函数列 $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots,$

$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$, 记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积, 求

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$, 求曲线 $f(x, y) = 0$

所围成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵.

(23) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^\alpha$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是 ()

- (A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

【答案】 B

【解析】 由定义 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^\alpha(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2^\alpha x^{\alpha-1} = 0$

所以 $\alpha - 1 > 0$, 故 $\alpha > 1$.

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $(1 - \cos x)^\alpha \sim \frac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{2^\alpha}$ 是比 x 的高阶无穷小, 所以 $\frac{2}{\alpha} - 1 > 0$, 即 $\alpha < 2$.

故选 B

(2) 下列曲线中有渐近线的是 ()

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】关于 C 选项: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} = 1 + 0 = 1$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} [x + \sin \frac{1}{x} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 所以 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y = x$.

故选 C

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上 ()

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

【答案】D

【解析】令 $F(x) = g(x) - f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x - f(x)$, 则

$$F(0) = F(1) = 0,$$

$$F'(x) = -f(0) + f(1) - f'(x), F''(x) = -f''(x).$$

若 $f''(x) \geq 0$, 则 $F''(x) \leq 0$, $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的.

又 $F(0) = F(1) = 0$, 所以当 $x \in [0,1]$ 时, $F(x) \geq 0$, 从而 $g(x) \geq f(x)$.

故选 D.

(4) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是 ()

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$

(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$

(C) $10\sqrt{10}$

(D) $5\sqrt{10}$

【答案】C

【解析】

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{2t+4}{2t} \right|_{t=1} = 3$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} = \left. \frac{dy'}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{-\frac{2}{t^2}}{2t} \right|_{t=1} = -1$$

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1+q)^{\frac{3}{2}}}, \therefore R = \frac{1}{k} = 10\sqrt{10}$$

故选 C

- (5) 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = x f'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()
- (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】因为 $\frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$, 所以 $\xi^2 = \frac{x-f(x)}{f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-f(x)}{x^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^2 \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

故选 D.

- (6) 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ()

- (A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得
- (B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得
- (C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得
- (D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得

【答案】A

【解析】记 $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $B \neq 0$, A, C 相反数则 $\Delta = AC - B^2 < 0$, 所以 $u(x, y)$ 在 D 内无极值, 则极值在边界处取得.

故选 A

$$(7) \text{ 行列式 } \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = \quad ()$$

- (A) $(ad - bc)^2$ (B) $-(ad - bc)^2$ (C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$ (D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$

【答案】B

【解析】由行列式的展开定理展开第一列

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix} \\ &= -ad(ad - bc) + bc(ad - bc) \\ &= -(ad - bc)^2. \end{aligned}$$

(8) 设 a_1, a_2, a_3 均为三维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $a_1 + ka_3, a_2 + la_3$ 线性无关是向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关的 ()

- (A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

【答案】A

$$\text{【解析】 } (\alpha_1 + k\alpha_3 \quad \alpha_2 + l\alpha_3) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \text{记 } A = (\alpha_1 + k\alpha_3 \quad \alpha_2 + l\alpha_3), B = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3), C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}. \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无}$$

关, 则 $r(A) = r(BC) = r(C) = 2$, 故 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关.

\Rightarrow 举反例. 令 $\alpha_3 = 0$, 则 α_1, α_2 线性无关, 但此时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 却线性相关.

综上所述, 对任意常数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的必要非充分条件.

故选 A

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

$$(9) \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{3}{8}\pi$

【解析】

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int_{-\infty}^1 \frac{1}{(x+1)^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

$$(10) \text{ 设 } f(x) \text{ 是周期为 } 4 \text{ 的可导奇函数, 且 } f'(x) = 2(x-1), \quad x \in [0, 2], \text{ 则 } f(7) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 1

【解析】 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$ 且为偶函数

$$\text{则 } f'(x) = 2(-x-1), \quad x \in [-2, 0]$$

又 $f(x) = -x^2 - 2x + c$ 且为奇函数, 故 $c=0$

$$\therefore f(x) = -x^2 - 2x, \quad x \in [-2, 0]$$

又 $\because f(x)$ 的周期为 4, $\therefore f(7) = f(-1) = 1$

$$(11) \text{ 设 } z = z(x, y) \text{ 是由方程 } e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4} \text{ 确定的函数, 则 } dz \Big|_{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $-\frac{1}{2}(dx + dy)$

【解析】对 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 方程两边同时对 x, y 求偏导

$$\begin{cases} e^{2yz} \cdot 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ e^{2yz} (2z + 2y \frac{\partial z}{\partial y}) + 2y + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

当 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ 时, $z = 0$

$$\text{故 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{故 } dz \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} dx + \left(-\frac{1}{2}\right) dy = -\frac{1}{2}(dx + dy)$$

(12) 曲线 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是

_____.

【答案】 $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$

【解析】 由直角坐标和极坐标的关系 $\begin{cases} x = r \cos \theta = \theta \cos \theta \\ y = r \sin \theta = \theta \sin \theta \end{cases}$,

于是 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 对应于 $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{切线斜率 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\theta \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \theta \sin \theta} \quad \therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0, \frac{\pi}{2})} = -\frac{2}{\pi}$$

所以切线方程为 $y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x - 0)$

$$\text{即 } y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$$

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

【答案】 $\frac{11}{20}$

【解析】质心横坐标 $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx}$

$$\int_0^1 \rho(x)dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{3}$$

$$\int_0^1 x\rho(x)dx = \int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1)dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{12}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}$$

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围

_____.

【答案】 $[-2, 2]$

【解析】配方法: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_3)^2 - a^2x_3^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2$

由于二次型负惯性指数为 1, 所以 $4 - a^2 \geq 0$, 故 $-2 \leq a \leq 2$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ ，且 $y(2) = 0$ ，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

【解析】由 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ ，得

$$(y^2 + 1)y' = 1 - x^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

此时上面方程为变量可分离方程，解的通解为

$$\frac{1}{3}y^3 + y = x - \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\text{由 } y(2) = 0 \text{ 得 } c = \frac{2}{3}$$

$$\text{又由 } \textcircled{1} \text{ 可得 } y'(x) = \frac{1 - x^2}{y^2 + 1}$$

当 $y'(x) = 0$ 时， $x = \pm 1$ ，且有：

$$x < -1, y'(x) < 0$$

$$-1 < x < 1, y'(x) > 0$$

$$x > 1, y'(x) < 0$$

所以 $y(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极小值，在 $x = 1$ 处取得极大值

$$y(-1) = 0, y(1) = 1$$

即： $y(x)$ 的极大值为 1，极小值为 0.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ，计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

【解析】D 关于 $y = x$ 对称，满足轮换对称性，则：

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$

$$\therefore I = \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} + \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} \right] dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sin \pi r \cdot r dr \\
&= \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{\pi}\right) \int_1^2 r d \cos \pi r \\
&= -\frac{1}{4} \left[\cos \pi r \cdot r \Big|_1^2 - \int_1^2 \cos \pi r dr \right] \\
&= -\frac{1}{4} \left[2 + 1 - \frac{1}{\pi} \sin \pi r \Big|_1^2 \right] \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】由 $z = f(e^x \cos y)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(e^x \cos y) \cdot (-e^x \sin y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y \cdot e^x \cos y + f'(e^x \cos y) \cdot e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(e^x \cos y) \cdot (-e^x \sin y) \cdot (-e^x \sin y) + f'(e^x \cos y) \cdot (-e^x \cos y)$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 代入得,

$$f''(e^x \cos y) \cdot e^{2x} = [4f(e^x \cos y) + e^x \cos y] e^{2x}$$

即

$$f''(e^x \cos y) - 4f(e^x \cos y) = e^x \cos y,$$

令 $e^x \cos y = t$, 得 $f''(t) - 4f(t) = t$

特征方程 $\lambda^2 - 4 = 0, \lambda = \pm 2$ 得齐次方程通解 $\bar{y} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

设特解 $y^* = at + b$, 代入方程得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0$, 特解 $y^* = -\frac{1}{4}t$

则原方程通解为 $y=f(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}t$

由 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 得 $c_1 = \frac{1}{16}, c_2 = -\frac{1}{16}$, 则

$$y=f(u) = \frac{1}{16}e^{2u} - \frac{1}{16}e^{-2u} - \frac{1}{4}u.$$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$, 证明: (I)

$$0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x - a, x \in [a, b],$$

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

【解析】(I) 由积分中值定理 $\int_a^x g(t)dt = g(\xi)(x-a), \xi \in [a, x]$

$$\because 0 \leq g(x) \leq 1, \therefore 0 \leq g(\xi)(x-a) \leq (x-a)$$

$$\therefore 0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq (x-a)$$

(II) 直接由 $0 \leq g(x) \leq 1$, 得到

$$0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^x 1dt = (x-a)$$

(II) 令 $F(u) = \int_a^u f(x)g(x)dx - \int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)dx$

$$F'(u) = f(u)g(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right) \cdot g(u)$$

$$= g(u) \left[f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right) \right]$$

$$\text{由 (I) 知 } 0 \leq \int_a^u g(t)dt \leq (u-a) \quad \therefore a \leq a + \int_a^u g(t)dt \leq u$$

又由于 $f(x)$ 单增, 所以 $f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right) \geq 0$

$$\therefore F'(u) \geq 0, \therefore F(u) \text{ 单调不减, } \therefore F(u) \geq F(a) = 0$$

取 $u = b$, 得 $F(b) \geq 0$, 即 (II) 成立.

(20) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in [0, 1]$, 定义函数列

$f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, \dots , $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, \dots , 记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$

及 x 轴所围成平面图形的面积, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$.

【解析】 $f_1(x) = \frac{x}{1+x}$, $f_2(x) = \frac{x}{1+2x}$, $f_3(x) = \frac{x}{1+3x}$, \dots , $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$,

$$\therefore S_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{1+nx} dx = \int_0^1 \frac{x + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{1+nx} dx$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^1 1 dx - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{1+nx} dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \ln(1+nx) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \ln(1+n)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} = 1 - 0 = 1$$

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$, 求曲线

$f(x, y) = 0$ 所围成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【解析】 因为 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 所以 $f(x, y) = y^2 + 2y + \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为待定函数.

又因为 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y) \ln y$, 则 $\varphi(y) = 1 - (2-y) \ln y$, 从而

$$f(x, y) = y^2 + 2y + 1 - (2-x) \ln x = (y+1)^2 - (2-x) \ln x.$$

令 $f(x, y) = 0$, 可得 $(y+1)^2 = (2-x) \ln x$, 当 $y = -1$ 时, $x = 1$ 或 $x = 2$, 从而所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x) \ln x dx \\ &= \pi \int_1^2 \ln x d \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[\ln x \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_1^2 - \pi \int_1^2 \left(2 - \frac{x}{2} \right) dx \\
&= \pi 2 \ln 2 - \pi \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^2 = \pi 2 \ln 2 - \pi \cdot \frac{5}{4} = \pi \left(2 \ln 2 - \frac{5}{4} \right).
\end{aligned}$$

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

【解析】

$$\begin{aligned}
(A|E) &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

(I) $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi = (-1, 2, 3, 1)^T$

(II) $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$

$Ax = e_1$ 的通解为 $x = k_1 \xi + (2, -1, -1, 0)^T = (2 - k_1, -1 + 2k_1, -1 + 3k_1, k_1)^T$

$Ax = e_2$ 的通解为 $x = k_2 \xi + (6, -3, -4, 0)^T = (6 - k_2, -3 + 2k_2, -4 + 3k_2, k_2)^T$

$Ax = e_3$ 的通解为 $x = k_3 \xi + (-1, 1, 1, 0)^T = (-1 - k_3, 1 + 2k_3, 1 + 3k_3, k_3)^T$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 2 - k_1 & 6 - k_2 & -1 - k_3 \\ -1 + 2k_1 & -3 + 2k_2 & 1 + 2k_3 \\ -1 + 3k_1 & -4 + 3k_2 & 1 + 3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数})$$

(23) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【解析】已知 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ \cdots \ \cdots \ 1)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} (0 \ 0 \ \cdots \ 1)$,

则 A 的特征值为 n , 0 ($n-1$ 重).

A 属于 $\lambda = n$ 的特征向量为 $(1, 1, \dots, 1)^T$; $r(A) = 1$, 故 $Ax = 0$ 基础解系有 $n-1$ 个线性无关的解向量, 即 A 属于 $\lambda = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量; 故 A 相似于对角阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 n , 0 ($n-1$ 重), 同理 B 属于 $\lambda = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量, 故 B 相似于对角阵 Λ .

由相似关系的传递性, A 相似于 B .