2016年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试题及解答

本文档仅供学习交流之用. 试题来源于网络, 解答由孟庆鑫提供, 个人观点仅供参考.

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设 $a_1 = x\left(\cos\sqrt{x} - 1\right)$, $a_2 = \sqrt{x}\ln\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)$, $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上三个无穷小量按照从低到高阶的排序是 [B]

   (A) a_1, a_2, a_3. (B) a_2, a_3, a_1. (C) a_2, a_1, a_3. (D) a_3, a_2, a_1.

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 [D]

   (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geqslant 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

   (C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$

3. 反常积分 ① $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$, ② $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性为 [B]

   (A) ① 收敛, ② 收敛. (B) ① 收敛, ② 发散.

   (C) ① 发散, ② 收敛. (D) ① 发散, ② 发散.

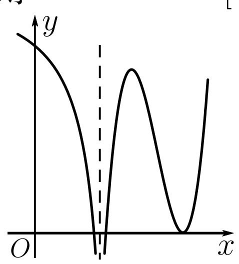
4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 [B]

   (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

   (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.

   (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.

   (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



5. 设函数 $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ 具有二阶连续导数, 且 $f_i''(x_0) < 0$ $(i = 1, 2)$, 若两条曲线 $y = f_i(x)$ $(i = 1, 2)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线 $y = g(x)$, 且在该点曲线 $y = f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y = f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个邻域内, 有 [A]

(A) $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant g(x)$.　　(B) $f_2(x) \leqslant f_1(x) \leqslant g(x)$.

(C) $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$.　　(D) $f_2(x) \leqslant g(x) \leqslant f_1(x)$.

6. 已知函数 $f(x, y) = \dfrac{e^x}{x-y}$, 则 [D]

(A) $f'_x - f'_y = 0$.　(B) $f'_x + f'_y = 0$.　(C) $f'_x - f'_y = f$.　(D) $f'_x + f'_y = f$.

7. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则下列结论错误的是 [C]

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则 [C]

(A) $a > 1$.　　(B) $a < -2$.

(C) $-2 < a < 1$.　　(D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. 曲线 $y = \dfrac{x^3}{1+x^2} + \arctan\left(1+x^2\right)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\ y = x + \dfrac{\pi}{2}\ }$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n} + 2\sin\dfrac{2}{n} + \cdots + n\sin\dfrac{n}{n}\right) = \underline{\ \sin 1 - \cos 1\ }$.

11. 以 $y = x^2 - e^x$ 和 $y = x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为 $\underline{\ y' - y = 2x - x^2\ }$.

12. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $f(x) = (x+1)^2 + 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则当 $n \geqslant 2$ 时, $f^{(n)}(0) = \underline{\ 5\cdot 2^{n-1}\ }$.

13. 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0, 则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时, l 对时间的变化率是 $\underline{\ 2\sqrt{2}\,v_0\ }$.

14. 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价, 则 $a = \underline{\ 2\ }$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to 0}(\cos 2x + 2x\sin x - 1 + 1)^{\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x-1}\cdot\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}} = e^{\frac{1}{3}}.$$ □

16.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 |\, t^2-x^2 \,|\,\mathrm{d}t \ (x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解 $f(x)=\int_0^1 |\, t^2-x^2 \,|\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3}, & 0<x<1,\\ x^2-\dfrac{1}{3}, & x\geqslant 1,\end{cases}$

于是 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

$f'(x)\overset{令}{=}0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$, 即 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$. □

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,\,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)\,z+\ln z+2\,(x+y+1)=0$ 确定, 求 $z=z(x,\,y)$ 的极值.

解 $(x^2+y^2)\,z+\ln z+2\,(x+y+1)=0,\ \ (z>0),$ (1)

对 (1) 式微分得: $(2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y)\,z+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z+\dfrac{1}{z}\,\mathrm{d}z+2\,(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=0,$

整理得: $2\,(xz+1)\,\mathrm{d}x+2\,(yz+1)\,\mathrm{d}y+\left(x^2+y^2+\dfrac{1}{z}\right)\mathrm{d}z=0,$ (2)

求 z 的极值, 就令 $\mathrm{d}z=0$, 代入 (2) 式得: $(xz+1)\,\mathrm{d}x+(yz+1)\,\mathrm{d}y=0,$

系数矩阵降秩, 即 $\begin{cases}xz+1=0,\\ yz+1=0,\end{cases}$ 与 (1) 式联立可解得 $(x,\,y,\,z)=(-1,\,-1,\,1),$

下面判断 $z(-1,\,-1)=1$ 是极大值还是极小值, 有两种方法.

方法一: 对 (2) 式再微分, 得:

$$
\begin{aligned}
&2\,(x\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x+2\,(xz+1)\,\mathrm{d}^2x+2\,(y\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y+2\,(yz+1)\,\mathrm{d}^2y\\
&+\mathrm{d}\left(x^2+y^2+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z+\left(x^2+y^2+\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}^2z=0.
\end{aligned}
$$

注意到 $x,\,y$ 是自变量, 于是 $\mathrm{d}^2x=0,\ \mathrm{d}^2y=0,$

再代入 $(x,\,y,\,z)=(-1,\,-1,\,1)$, $\mathrm{d}z=0$, 即有 $2\,\mathrm{d}x^2+2\,\mathrm{d}y^2+3\,\mathrm{d}^2z=0,$

于是 $\mathrm{d}^2z\Big|_{(-1,\,-1,\,1)}=-\dfrac{2}{3}\,(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)<0$, 即 $z(-1,\,-1)=1$ 是极大值.

方法二: 若 $z(-1,\,-1)=1$ 取极值, 则在 (1) 式确定的曲面上, $(-1,\,-1,\,1)$ 的去心邻域内, z 必从单侧趋近于 1. 令 $z=1+\varepsilon$, 代入 (1) 式,

整理得: $(x+1)^2+(y+1)^2+(x^2+y^2)\,\varepsilon+\ln(1+\varepsilon)=0.$ (3)

从 (3) 式看出, 必有 $\varepsilon<0$, 即 $z\to 1^-$,

从而可以判断 $z(-1,\,-1)=1$ 是极大值. □

18.（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1$, $y=x$, $y=-x$ 围成的有界区域,

计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $$\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\frac{\frac{x^2}{y^2}-1}{\frac{x^2}{y^2}+1}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\frac{\frac{x^2}{y^2}-1}{\frac{x^2}{y^2}+1}\,\mathrm{d}\frac{x}{y}=\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^2-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$=1-2\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=1-2\arctan t\Big|_0^1=1-\frac{\pi}{2}.\qquad\square$$

19.（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=\mu(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)\,y''-(2x+1)\,y'+2y=0$ 的两个解, 若 $\mu(-1)=e$, $\mu(0)=-1$, 求 $\mu(x)$ 并写出该微分方程的通解.

解 将 $y_2(x)=\mu(x)e^x$ 代入方程 $(2x-1)\,y''-(2x+1)\,y'+2y=0$ 得:

$(2x-1)\mu''+(2x-3)\mu'=0\ \Rightarrow\ \mu'=c_1(2x-1)e^{-x}\ \Rightarrow\ \mu=-c_1(2x+1)e^{-x}+c_2$,

$\mu(-1)=e,\ \mu(0)=-1\ \Rightarrow\ \mu(x)=-(2x+1)e^{-x}$,

该方程通解为 $y=C_1e^x+C_2(2x+1)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. $\square$

20.（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解 曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕 x 轴旋转一周得到单位球面在 $x\geqslant 0$ 的部分.

$$V=\frac{2\pi}{3}-\int_0^1\pi y^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\,\mathrm{d}\cos^3 t=\frac{18\pi}{35},$$

$$S=2\pi+\int_s 2\pi y\,\mathrm{d}s=2\pi+2\pi\int_s y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{16\pi}{5}.\qquad\square$$

21.（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(I) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(II) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(I) 解 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\,\mathrm{d}t$,

$$\overline{f(x)}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\,\mathrm{d}t\int_t^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3\pi}.$$

(II) 证 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}\Rightarrow f$ 在 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内先减后增,

$f(0)=0,\ \overline{f(x)}>0\Rightarrow f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内有唯一零点. □

22.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$, 且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(I) 解 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&a&1\\0&1&1-2a&-1\\0&0&a(2-a)&a-2\end{array}\right)$,

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解 $\Rightarrow a=0$.

(II) 解 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数. □

23.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(I) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(II) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$, 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(I) 解 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$, $\lambda_1=-2$ 对应的特征向量为 $(1,2,0)^{\mathrm{T}}$,

$\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $(3,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{令}{=}\boldsymbol{\Lambda}$,

$$\boldsymbol{A}^{99} = (\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^{99} = \boldsymbol{P\Lambda}^{99}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(II) 解 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{BA} \Rightarrow \boldsymbol{B}^{100} = \boldsymbol{BA}^{99}$, 即

$$\boldsymbol{\beta}_1 = (-2+2^{99})\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (-2+2^{100})\,\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1 = (1-2^{99})\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (1-2^{100})\,\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_1 = (2-2^{98})\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (2-2^{99})\,\boldsymbol{\alpha}_2. \qquad \square$$