

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题

一、选择题:1: 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 ()

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

(B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

(C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

【答案】(D)

【解析】 $\int \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x}$, 则 $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = -(x+1)e^{-x} \Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x} = 3e^{-2}$.

(2) 函数 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

(A) 连续

(B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点

(D) 有无穷间断点

【答案】(B)

【解析】 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot x^2}{x \cdot t}} = e^x$, $x \neq 0$, 故 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$.

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ($\alpha > 0, \beta > 0$), 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则: ()

(A) $\alpha - \beta > 0$

(B) $0 < \alpha - \beta \leq 1$

(C) $\alpha - \beta > 2$

(D) $0 < \alpha - \beta \leq 2$

【答案】(A)

【解析】 $x < 0$ 时, $f'(x) = 0$ $f'_-(0) = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cos \frac{1}{x^\beta} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta}$$

$$x > 0 \text{ 时, } f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + (-1)x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta} (-\beta) \frac{1}{x^{\beta+1}}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta}$$

$$f'(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续则: } f'_-(0) = f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} = 0 \text{ 得 } \alpha - 1 > 0$$

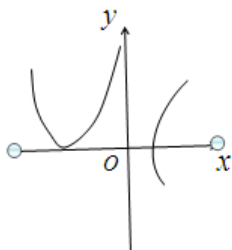
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x^\beta} + \beta x^{\alpha-\beta-1} \sin \frac{1}{x^\beta} \right) = 0$$

得: $\alpha - \beta - 1 > 0$, 答案选择 A

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线

$y = f(x)$ 的拐点的个数为 ()

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3



【答案】(C)

【解析】根据图像观察存在两点, 二阶导数变号. 则拐点个数为 2 个。

(5) 设函数 $f(u, v)$ 满足 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}}$ 依次是 ()

- (A) $\frac{1}{2}, 0$
 (B) $0, \frac{1}{2}$
 (C) $-\frac{1}{2}, 0$
 (D) $0, -\frac{1}{2}$

【答案】(D)

【解析】此题考查二元复合函数偏导的求解.

令 $u = x + y, v = \frac{y}{x}$, 则 $x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 从而 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$ 变为

$$f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v)}{1+v}. \text{ 故 } \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{2u(1-v)}{1+v}, \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2u^2}{(1+v)^2},$$

因而 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1 \\ v=1}} = -\frac{1}{2}$. 故选 (D).

(6) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy = 1, 4xy = 1$ 与直线 $y = x, y = \sqrt{3}x$ 围成的平面区域,

函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$ ()

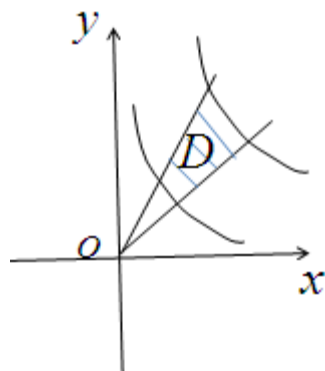
(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

【答案】(B)



【解析】根据图可得，在极坐标系下计算该二重积分的积分区域为

$$D = \left\{ (r, \theta) \left| \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right. \right\}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

故选 B.

(7) 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有无

穷多解的充分必要条件为:

()

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$ (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

【答案】D

【解析】 $(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix}$,

由 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}, \mathbf{b}) < 3$, 故 $a=1$ 或 $a=2$, 同时 $d=1$ 或 $d=2$. 故选 (D)

(8) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中

$\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, 若 $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$ 则 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Qy}$ 下的标准形

为:

()

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$, 故 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{y}^T (\mathbf{P}^T \mathbf{AP}) \mathbf{y} = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. 且

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = PC$$

$$Q^T AQ = C^T (P^T AP) C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $f = x^T Ax = y^T (Q^T AQ) y = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ 。选 (A)

二、填空题：9：14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ _____

【答案】 48

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3+3t^2}{1+t^2} = 3(1+t^2)^{-1}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} [3(1+t^2)^{-1}] = \frac{d[3(1+t^2)^{-1}]}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{-6t(1+t^2)^{-2}}{1+t^2} = -\frac{6t}{(1+t^2)^3}$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = 48.$$

(10) 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) =$ _____

【答案】 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

【解析】 根据莱布尼茨公式得:

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 2(2^x)^{(n-2)} \Big|_{x=0} = \frac{n(n-1)}{2} 2(\ln 2)^{n-2} = n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$$

(11) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 若 $\varphi(1)=1, \varphi'(1)=5$, 则 $f(1) =$ _____

【答案】 2

【解析】 已知 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$ ，求导得 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2)$ ，故有 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1$ ， $\varphi'(1) = 1 + 2f(1) = 5$ ，则 $f(1) = 2$ 。

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解，且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x) =$ _____。

【答案】 $e^{-2x} + 2e^x$

【解析】 由题意知： $y(0) = 3$ ， $y'(0) = 0$ ，由特征方程： $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ 解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ 所以微分方程的通解为： $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ 代入 $y(0) = 3$ ， $y'(0) = 0$ 解得： $C_1 = 2, C_2 = 1$ 解得： $y = 2e^x + e^{-2x}$

(13) 若函数 $Z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定，则 $dz \Big|_{(0,0)} =$ _____。

【答案】 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$

【解析】 当 $x = 0, y = 0$ 时 $z = 0$ ，则对该式两边求偏导可得 $(3e^{x+2y+3z} + xy) \frac{\partial z}{\partial x} = -yz - e^{x+2y+3z}$

$(3e^{x+2y+3z} + xy) \frac{\partial z}{\partial y} = -xz - 2e^{x+2y+3z}$ 。将 $(0,0,0)$ 点值代入即有

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

则可得 $dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3} dx - \frac{2}{3} dy = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$ 。

(14) 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$ ， $B = A^2 - A + E$ ，其中 E 为 3 阶单位阵，则行列式

$|B| =$ _____。

【答案】 21

【解析】 A 的所有特征值为 $2, -2, 1$ 。 B 的所有特征值为 $3, 7, 1$ 。

所以 $|B| = 3 \times 7 \times 1 = 21$ 。

三、解答题：15~23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小,

求 a, b, k 的值.

【答案】 $a = -1, k = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}$

【解析】

方法一:

因为 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,

那么,

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a)x + (b - \frac{a}{2})x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3)}{kx^3},$$

可得:
$$\begin{cases} 1+a=0 \\ b-\frac{a}{2}=0 \\ \frac{a}{3k}=1 \end{cases}, \text{ 所以, } \begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ k=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

方法二:

由题意得

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim_{x \rightarrow 0} 3kx^2 = 0$, 得分子 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+a) = 0$, 求得 c ;

于是
$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b(1+x) \sin x + bx(1+x) \cos x}{3kx^2(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b(1+x) \sin x + bx(1+x) \cos x}{3kx^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + b \sin x + b(1+x) \cos x + b(1+x) \cos x + bx \cos x - bx(1+x) \sin x}{6kx}
\end{aligned}$$

由分母 $\lim_{x \rightarrow 0} 6kx = 0$ ，得分子

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + b \sin x + 2b(1+x) \cos x + bx \cos x - bx(1+x) \sin x] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2b \cos x) = 0,$$

$$\text{求得 } b = -\frac{1}{2};$$

进一步，b 值代入原式

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} \sin x - (1+x) \cos x - \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} x(1+x) \sin x}{6kx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cos x - \cos x + (1+x) \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} (1+x) \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} x(1+x) \cos x}{6k} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{6k}, \text{ 求得 } k = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分)

设 $A > 0$ ，D 是由曲线段 $y = A \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y = 0$ ， $x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域， V_1 ， V_2

分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转成旋转体的体积，若 $V_1 = V_2$ ，求 A 的值。

【答案】 $\frac{8}{\pi}$

【解析】 由旋转体的体积公式，得

$$V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (A \sin x)^2 dx = \pi A^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2 A^2}{4}$$

$$V_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x) dx = -2\pi A \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x = 2\pi A$$

由题 $V_1 = V_2$, 求得 $A = \frac{8}{\pi}$.

(17) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f_{xy}''(x, y) = 2(y+1)e^x$, $f'_x(x, 0) = (x+1)e^x$, $f(0, y) = y^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$ 的极值。

【答案】极小值 $f(0, -1) = -1$

【解析】 $f_{xy}''(x, y) = 2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分, 得

$$f'_x(x, y) = 2\left(\frac{1}{2}y^2 + y\right)e^x + \varphi(x) = (y^2 + 2y)e^x + \varphi(x),$$

故 $f'_x(x, 0) = \varphi(x) = (x+1)e^x$,

求得 $\varphi(x) = e^x(x+1)$,

故 $f'_x(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + e^x(1+x)$, 两边关于 x 积分, 得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (y^2 + 2y)e^x + \int e^x(1+x)dx \\ &= (y^2 + 2y)e^x + \int (1+x)de^x \\ &= (y^2 + 2y)e^x + (1+x)e^x - \int e^x dx \\ &= (y^2 + 2y)e^x + (1+x)e^x - e^x + C \\ &= (y^2 + 2y)e^x + xe^x + C \end{aligned}$$

由 $f(0, y) = y^2 + 2y + C = y^2 + 2y$, 求得 $C = 0$.

所以 $f(x, y) = (y^2 + 2y)e^x + xe^x$.

$$\text{令 } \begin{cases} f'_x = (y^2 + 2y)e^x + e^x + xe^x = 0 \\ f'_y = (2y + 2)e^x = 0 \end{cases}, \text{ 求得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

又 $f''_{xx} = (y^2 + 2y)e^x + 2e^x + xe^x$,

$$f''_{xy} = 2(y+1)e^x, \quad f''_{yy} = 2e^x,$$

当 $x=0, y=-1$ 时, $A=f''_{xx}(0,-1)=1, B=f''_{xy}(0,-1)=0, C=f''_{yy}(0,-1)=2,$

$AC-B^2 > 0, f(0,-1) = -1$ 为极小值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y)dxdy$, 其中 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$

【答案】 $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}$

【解析】
$$\begin{aligned} \iint_D x(x+y)dxdy &= \iint_D x^2 dxdy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} \stackrel{x=\sqrt{2}\sin t}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cos^2 t dt - \frac{2}{5} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} \stackrel{u=2t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

(19) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+td} dt$, 求 $f(x)$ 零点的个数?

【答案】 2 个

【解析】 $f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}(2x-1)$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点为 $x = \frac{1}{2}$,

在 $(-\infty, \frac{1}{2})$, $f(x)$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, $f(x)$ 单调递增

故 $f(\frac{1}{2})$ 为唯一的极小值, 也是最小值.

而 $f(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+td} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2} dt - \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{1+td} dt$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+td} - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+td}$$

在 $(\frac{1}{2}, 1)$, $\sqrt{1+t^2} < \sqrt{1+t}$, 故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t} dt < 0$

从而有 $f(\frac{1}{2}) < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\int_x^1 \sqrt{1+t^2} dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt - \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt]$$

考虑 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^{x^2} \sqrt{1+t} dt}{\int_1^x \sqrt{1+t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = +\infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上各有一个零点, 所以零点个数为 2.

(20) (本题满分 10 分)

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比, 现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 的恒温介质中冷却, 30min 后该物体降至 30°C , 若要将该物体的温度继续降至 21°C , 还需冷却多长时间?

【答案】 30 min

【解析】 设 t 时刻物体温度为 $x(t)$, 比例常数为 $k(>0)$, 介质温度为 m , 则

$$\frac{dx}{dt} = -k(x-m), \text{ 从而 } x(t) = Ce^{-kt} + m,$$

$$x(0) = 120, m = 20, \text{ 所以 } C = 100, \text{ 即 } x(t) = 100e^{-kt} + 20$$

$$\text{又 } x(\frac{1}{2}) = 30, \text{ 所以 } k = 2 \ln 10, \text{ 所以 } x(t) = \frac{1}{100^{t-1}} + 20$$

当 $x = 21$ 时, $t = 1$, 所以还需要冷却 30 min.

(21) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty]$ 上具有 2 阶导数, $f(a) = 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 设 $b > a$,

曲线 $y = f(x)$ 在点 $(b, f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0, 0)$, 证明 $a < x_0 < b$.

【证明】 根据题意得点 $(b, f(b))$ 处的切线方程为 $y - f(b) = f'(b)(x - b)$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 得 } x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

因为 $f'(x) > 0$ 所以 $f(x)$ 单调递增, 又因为 $f(a) = 0$

所以 $f(b) > 0$, 又因为 $f'(b) > 0$

$$\text{所以 } x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} < b$$

又因为 $x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)}$, 而在区间 (a, b) 上应用拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \xi \in (a, b)$$

$$\text{所以 } x_0 - a = b - a - \frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{f(b)}{f'(\xi)} - \frac{f(b)}{f'(b)} = f(b) \frac{f'(b) - f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$$

因为 $f''(x) > 0$ 所以 $f'(x)$ 单调递增

所以 $f'(b) > f'(\xi)$

所以 $x_0 - a > 0$, 即 $x_0 > a$, 所以 $a < x_0 < b$, 结论得证.

(22) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ 且 } A^3 = O.$$

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, E 为 3 阶单位阵, 求 X .

【答案】

$$a = 0, X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【解析】

$$\text{(I) } A^3 = O \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

(II) 由题意知

$$X - XA^2 - AX + AXA^2 = E \Rightarrow X(E - A^2) - AX(E - A^2) = E$$

$$\Rightarrow (E - A)X(E - A^2) = E \Rightarrow X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = [(E - A^2)(E - A)]^{-1}$$

$$\Rightarrow X = (E - A^2 - A)^{-1}$$

$$E - A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(23) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ 相似于矩阵 } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

【答案】

(1) $a = 4, b = 5$;

$$(2) \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

【解析】(I) $A \sim B \Rightarrow \text{tr}(A) = \text{tr}(B) \Rightarrow 3 + a = 1 + b + 1$

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a - b = -1 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$$

(II)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = E + C$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$

$\lambda = 0$ 时 $(0E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T; \xi_2 = (-3, 0, 1)^T$

$\lambda = 4$ 时 $(4E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A = 1 + \lambda_C : 1, 1, 5$

$$\text{令 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$