

2018年考研数二真题

一、选择题

1、若 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + ax^2 + bx)^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 则 ()

A、 $a = \frac{1}{2}, b = -1$ B、 $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ C、 $a = \frac{1}{2}, b = 1$ D、 $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

2、下列函数中, 在 $x = 0$ 处不可导的是

(A) $f(x) = |x| \sin|x|$ (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

(C) $f(x) = \cos|x|$ (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

3、 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 0 \\ x-b, & x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $f(x) + g(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 则 ()

(A) $a = 3, b = 1$ (B) $a = 3, b = 2$ (C) $a = -3, b = 1$ (D) $a = -3, b = 2$

4、设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则 ()

A 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

B 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

C 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

D 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

5、设 $M = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

(A) $M > N > K$ (B) $M > K > N$ (C) $K > M > N$ (D) $K > N > M$

6、 $\int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{2-x^2} (1-xy) dy + \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} (1-xy) dy$

A $\frac{5}{3}$ B $\frac{5}{6}$ C $\frac{7}{3}$ D $\frac{7}{6}$

7、下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的为_____.

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8、设 A, B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩， $(X \ Y)$ 表示分块矩阵，则

A. $r(A \ AB) = r(A)$

B. $r(A \ BA) = r(A)$

C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$

D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$

二、填空题

9、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 [\arctan(x+1) - \arctan x] = \underline{\hspace{2cm}}$

10、曲线 $y = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程 _____

11、 $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$

12、曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的曲率是_____

13、函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $\ln z + e^{z-1} = xy$ 确定，则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1, \frac{1}{2})} = \underline{\hspace{2cm}}$

14、设 A 为 3 阶矩阵， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组，若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ， $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$ ， $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$ ，则 A 的实特征值为_____

三、解答题

15、求不定积分 $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$

16、已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(x-t) dt = ax^2$,

(1) 求 $f(x)$

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1, 求 a 的值。

17、设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 与 X 轴围成, 计算 $\iint_D (x+2y) dx dy$ 。

18、已知常数 $k \geq \ln 2 - 1$, 证明 $(x-1)(x - \ln^2 x + 2k \ln x - 1) \geq 0$

19、一根绳长 2m, 截成三段, 分别折成圆、三角形、正方形, 这三段分别为多长是所得的面积总和最小, 并求该最小值。

20、已知曲线 L: $y = \frac{4}{9} x^2 (x \geq 0)$, 点 $O(0,0)$, 点 $A(0,1)$, 设 P 是 L 上的动点, S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成的图形的面积, 若 P 运动点 (3,4) 时沿 X 轴正方向速度是 4, 此时 S 关于时间 t 的变化率。

21、数列 $\{x_n\}$, $x_1 > 0$, $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$. 证: $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

22、设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数,

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形

23、已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(I) 求 a

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P

