2019年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当$x \to 0$时，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$

（A）1. （B）2.

（C）3. （D）4.

【答案】C

【解析】$x-\tan x = x-(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)) \sim -\frac{1}{3}x^3$, 故$k=3$.

（2）设函数$y = x\sin x + 2\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$的拐点坐标为

（A）$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ （B）$(0,2)$.

（C）$(\pi,-2)$ （D）$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

【答案】C

【解析】$y' = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$

$y'' = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$

令$y''=0$得$x=0$或$x=\pi$

当$x>\pi$时$y''>0$;当$x<\pi$时，$y''<0$，故$(\pi,-2)$为拐点

（3）下列反常积分发散的是（　　）

（A）$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$ （B）$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ （C）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ （D）$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

【答案】（D）

【解析】（A）$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xde^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$,收敛..

（B）$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx^2 = \frac{1}{2}$,收敛.

（C）$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]^2\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$，收敛.

（D）$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$.发散

综上，故选（D）

（4）已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$, 则 a,b,c 依次为（　　）

（A）1,0,1　　（B）1,0,2　　（C）2,1,3　　（D）2,1,4

【答案】D

【解析】

由题干分析出-1为特征方程$r^2+ar+b=0$的二重根, 即$(r+1)^2=0$

故$a=2,b=1$;

又e^x为$y''+2y'+y=ce^x$的解, 代入方程得$c=4$.

（5）

【答案】

【解析】

（6）已知 $f(x),g(x)$ 二阶可导且在 $x=a$ 处连续，则 $f(x),g(x)$ 在 a 点相切且曲率相等是 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 的（　　）

（A）充分非必要条件　　（B）充分必要条件

（C）必要非充分条件　　（D）既非充分也非必要条件

【答案】（C）

【解析】因 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{[f(a)-g(a)]+\left[f'(a)-g'(a)\right](x-a)+\frac{1}{2}\left[f''(a)-g''(a)\right](x-a)^2}{(x-a)^2}=0$$ ，故

$$\begin{cases} f(a)-g(a)=0 \\ f'(a)-g'(a)=0 \\ f''(a)-g''(a)=0 \end{cases}$$

由此可得 $f(x),g(x)$ 在 a 点相切且曲率相等。反之，由 $f(x),g(x)$ 在 a 点相切且曲率相等可得 $f(a)-g(a)=0$，$f'(a)-g'(a)=0,\left|f''(a)\right|=\left|g''(a)\right|$，但无法肯定 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$.

综上，选（C）.

（7）设 A 是四阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是（　）

（A）0　　　　（B）1　　　　（C）2　　　　（D）3

【答案】（A）

【解析】由于 $AX=0$ 的基础解系有只有两个解向量，则由$4-R(A)=2$可得$R(A)=2<3$，故$R(A^*)=0.$

（8）设 A 是3阶实对称矩阵，E 是3阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且$|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形为

（A） $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　（B） $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.（C） $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.（D） $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解析】$\because A^2+A=2E$，设 A 的特征值为 λ

$\therefore \lambda^2+\lambda=2,(\lambda+2)(\lambda-1)=0,\therefore \lambda=-2$或$1$

$\because |A|=4,\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=1 \therefore q=2,p=1$

$\therefore X^TAx$ 的规范形为 $y_1{}^2-y_2{}^2-y_3{}^2$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$______.

【答案】$4e^2$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{x}+\frac{2^x-1}{x})}=e^{2(1+\ln 2)}=e^{4+2\ln 2}=4e^2$

(10) 曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$在$t=\frac{3}{2}\pi$对应点处切线在$y$轴上的截距______.

【答案】$y=\frac{3}{2}\pi+2$

【解析】$t=\frac{3}{2}\pi$时，$x=\frac{3}{2}\pi+1, y=1, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=\left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=\left.\frac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3}{2}\pi}=-1$

则曲线在$t=\frac{3}{2}\pi$对应点处的切线方程为$y-1=-(x-\frac{3}{2}\pi-1)$

令$x=0$得$y=\frac{3}{2}\pi+2$

(11)设函数$f(u)$可导，$z=yf(\frac{y^2}{x})$，则$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_________.

【答案】$yf(\frac{y^2}{x})$

【解析】$z=yf(\frac{y^2}{x}), \frac{\partial z}{\partial x}=yf'(\frac{y^2}{x})(-\frac{y^2}{x^2}), \frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{y^2}{x})+yf'(\frac{y^2}{x})(\frac{2y}{x}),$

则$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=yf(\frac{y^2}{x})$.

(12) 设函数$y=\ln\cos x(0\le x\le\frac{\pi}{6})$的弧长为_________。

【答案】$\frac{1}{2}\ln 3$

【解析】

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x dx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

（13）已知函数 $f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt$, 则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________.

【答案】$\frac{1}{4}(\cos 1-1)$

【解析】

$\int_0^1 f(x)dx f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt$,

令 $\varphi(x)=\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt$, 则 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\varphi(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(x)dx^2$

$=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)x^2\Big|_0^1-\int_0^1 x^2 d\varphi(x)\right]=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\sin x^2}{x}dx=\frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)$

（14）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\-2&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式，则

$A_{11}-A_{12}=$_

【答案】-4

【解析】$A_{11}-A_{12}=|A|=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\-2&0&3&4\end{vmatrix}=-4$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\le 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值

【答案】

【解析】当 $x>0$ 时. $f'(x)=(e^{2x\ln x})'=e^{2x\ln x}(2lnx+2)=x^{2x}(2lnx+2)$

当 $x<0$ 时. $f'(x)=(xe^x)'=e^x+xe^x$.又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，故 $f'(0)\not\exists$，因此

$$f'(x)=\begin{cases}x^{2x}(2lnx+2), x>0\\ e^x(1+x), x<0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，即$f(x)$单调递增，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，即$f(x)$单调递减.

故 $f(x)$在$x=0$取极大值, 且$f(0)=1$.

（16）（本题满分 10 分）求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

【答案】$-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$.

【解析】

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int\left[\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right]dx$$
$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C.$$

（17）（本题满分 10 分）已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且有 $y(0)=\sqrt{e}$.

（1）求 $y(x)$；

（2）$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求平面区域$D$绕$x$轴旋转成的旋转体体积

【答案】（1）$y=\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$；（2）$V=\frac{\pi}{2}(e^4-4)$；

【解析】（1）$y=e^{-\int(-x)dx}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{\int(-x)dx}dx+C\right)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+C\right)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$

由$y(e)=\sqrt{e}$可得$C=0$，故$y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）$V=\int_1^2\pi y^2dx=\int_1^2\pi xe^{x^2}dx=V=\frac{\pi}{2}(e^4-4).$

（18）（本题满分 10 分）

【答案】

【解析】

（19）（本题满分 10 分）$n\in N_+$，S_n 是 $f(x)=e^{-x}\sin x$ 的图像与 x 轴所围图形的面积，

求 S_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

【答案】

【解析】所求面积 $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx$.

$$\int_{0}^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin xdx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)\right]\Bigg|_{k\pi}^{(k+1)\pi}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[e^{-(k+1)\pi}(-1)^{k+1}-e^{-k\pi}(-1)^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}\right]=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right]=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2}{e^{\pi}-1}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx=2\int_{0}^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx$$

（20）（本题满分 11 分）已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ，求 a,b 的值，使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 下，上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式

【答案】

【解析】$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+av(x,y)e^{ax+by}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a^2v(x,y)e^{ax+by}$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a^2v(x,y)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+bv(x,y)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b^2v(x,y)e^{ax+by}$$

$$=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b^2v(x,y)e^{ax+by}$$

则 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}$

$$=2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+4a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+2a^2v(x,y)e^{ax+by}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}-4b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}$$

$$-2b^2v(x,y)e^{ax+by}+3\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+3av(x,y)e^{ax+by}+3\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+3bv(x,y)e^{ax+by}=0$$

即$2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(4a+3)\dfrac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\dfrac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3a+3b)v(x,y)=0$

由题意可知$\begin{cases}4a+3=0\\3-4b=0\end{cases}\Rightarrow$得$\begin{cases}a=-\dfrac{4}{3}\\b=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

（21）（本题满分 11 分）已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$；

（2）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

【答案】

【解析】（1）已知$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数.且$\int_0^1 f(x)dx=1$，故由拉格朗日中值定理可知，$\exists\xi_1\in(0,1)$使$f(\xi_1)=1$.根据题设，可知$f(\xi_1)=f(1)=1$，故利用罗尔定理，可知$\exists\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使$f'(\xi)=0$.

（2）令$G(x)=f(x)+x^2,G(0)=0,G(1)=2,G(\xi_1)=1+\xi_1^2,\xi_1\in(0,1)$，

对$G(x)$分别在$(0,\xi_1),(\xi_1,1)$上用拉格朗日中值定理，存在$\eta_1\in(0,\xi_1)$, 使得

$$\frac{G(\xi_1)-G(0)}{\xi_1}=G'(\eta_1),\text{即}\,G'(\eta_1)=\frac{1+\xi_1^{\,2}}{\xi_1},$$

存在$\eta_2\in(\xi_1,1)$, 使得

$$\frac{G(1)-G(\xi_1)}{1-\xi_1}=G'(\eta_2),\text{即}\,G'(\eta_2)=1+\xi_1,$$

对$G'(x)=f'(x)+2x$在(η_1,η_2)上用拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$, 使得

$$\frac{G'(\eta_2)-G(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=G''(\eta),\text{即}\,f''(\eta)+2=\frac{\xi_1-1}{\xi_1(\eta_2-\eta_1)}<0,\text{即}\,f''(\eta)<-2.$$

（22）（本题满分 11 分）已知向量组

$$(\mathrm{I})\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix},(\mathrm{II})\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix},$$若向量组(I)和向量组(II)等价，求α的取值，并将β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

【解析】$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&2\\4&4&a^2+3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&a^2-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&3\\a+3&1-a&a^2+3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&1-a&a^2-a\end{bmatrix}$,所以$a=1$.

$\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&4&4\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$, 所以$\beta_3=k\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},k\in R.$

所以$\beta_3=(-k-1)\alpha_1+k\alpha_2+2\alpha_3,k\in R.$

（23）（本题满分 11 分）已知矩阵$A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$相似，

（1）求x,y；

（2）求可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=B$；

【答案】（1）$x=3,y=-2$；（2）$P=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$

【解析】（1）$A\sim B\Rightarrow\begin{cases}trA=trB\\|A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=4\\x-y=5\end{cases}$,即$x=3,y=-2$

（2）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=0\Rightarrow A,B$的特征值为$\lambda_1$=2，$\lambda_2$=−2，$\lambda_3$=−2

当$\lambda_1=2$时，由$(2E-A)x=0,(2E-B)x=0$可得A、B属于特征值$\lambda_1=2$
的线性无关的特征向量分别为$\alpha_1=\left(-1,2,0\right)^T,\beta_1=\left(1,0,0\right)^T$；
当$\lambda_2=-1$时，由$(-E-A)x=0,(-E-B)x=0$可得A、B属于特征值$\lambda_2=-1$
的线性无关的特征向量分别为$\alpha_2=\left(-2,1,0\right)^T,\beta_2=\left(-1,3,0\right)^T$；
当$\lambda_3=-2$时，由$(-2E-A)x=0,(-2E-B)x=0$可得A、B属于特征值$\lambda_3=-2$
的线性无关的特征向量分别为$\alpha_3=\left(-1,2,0\right)^T,\beta_3=\left(0,0,1\right)^T$；

令$P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,则

$$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}\Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$$

故令$P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$,即$P^{-1}AP=B$.