

## 2010 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学三试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$ , 则  $a$  等于 ( )

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设  $y_1, y_2$  是一阶非齐次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个特解, 若常数  $\lambda, \mu$  使  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是该方程的解,  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是该方程对应的齐次方程的解, 则 ( )

- (A)  $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ . (B)  $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$ .  
 (C)  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ . (D)  $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$ .

【答案解析】见真题理论验证强化指导部分数二试题一(2).

(3) 设函数  $f(x), g(x)$  具有二阶导数, 且  $g''(x) < 0$ , 若  $g(x_0) = a$  是  $g(x)$  的极值, 则  $f(g(x))$  在  $x_0$  取极大值的一个充分条件是 ( )

- (A)  $f'(a) < 0$ . (B)  $f'(a) > 0$ . (C)  $f''(a) < 0$ . (D)  $f''(a) > 0$ .

(4) 设  $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$ , 则当  $x$  充分大时有 ( )

- (A)  $g(x) < h(x) < f(x)$ . (B)  $h(x) < g(x) < f(x)$ .  
 (C)  $f(x) < g(x) < h(x)$ . (D)  $g(x) < f(x) < h(x)$ .

(5) 设向量组  $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可由向量组  $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表示, 下列命题正确的是 ( )

- (A) 若向量组  $I$  线性无关, 则  $r \leq s$ .  
 (B) 若向量组  $I$  线性相关, 则  $r > s$ .  
 (C) 若向量组  $II$  线性无关, 则  $r \leq s$ .  
 (D) 若向量组  $II$  线性相关, 则  $r > s$ .

(6) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ , 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于 ( )

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(7) \quad \text{设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \text{ 则 } P\{X=1\} = \\ 1-e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

( )

(A) 0.

(B)  $\frac{1}{2}$ .

(C)  $\frac{1}{2} - e^{-1}$ .

(D)  $1 - e^{-1}$ .

(8) 设  $f_1(x)$  为标准正态分布的概率密度,  $f_2(x)$  为  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leq 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases} (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则  $a, b$  应满足 ( )

(A)  $2a + 3b = 4$ .

(B)  $3a + 2b = 4$ .

(C)  $a + b = 1$ .

(D)  $a + b = 2$ .

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设可导函数  $y = y(x)$  由方程  $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$  确定, 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_.

(10) 设位于曲线  $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}} (e \leq x < +\infty)$  下方,  $x$  轴上方的无界区域为  $G$ , 则  $G$  绕  $x$

轴旋转一周所得空间区域的体积是 \_\_\_\_\_.

(11) 设某商品的收益函数为  $R(p)$ , 收益弹性为  $1 + p^3$ , 其中  $p$  为价格, 且  $R(1) = 1$ , 则  $R(p) =$

\_\_\_\_\_.

(12) 若曲线  $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$  有拐点  $(-1, 0)$ , 则  $b =$  \_\_\_\_\_.

(13) 设  $A, B$  为 3 阶矩阵, 且  $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$ , 则  $|A + B^{-1}| =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ) 的简单随机样本, 统计量  $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

, 则  $E(T) =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分  $\iint_D (x+y)^3 dx dy$ , 其中  $D$  由曲线  $x = \sqrt{1+y^2}$  与直线  $x + \sqrt{2}y = 0$  及  $x - \sqrt{2}y = 0$  围成.

(17) (本题满分 10 分)

求函数  $u = xy + 2yz$  在约束条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$  下的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

( I ) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由.

( II ) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(19) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在  $[0, 3]$  上连续, 在  $(0, 3)$  内存在二阶导数, 且  $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$ ,

( I ) 证明存在  $\eta \in (0, 2)$ , 使  $f(\eta) = f(0)$ ; ;

( II ) 证明存在  $\xi \in (0, 3)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

已知线性方程组  $Ax = b$  存在 2 个不同的解.

( I ) 求  $\lambda, a$ ;

( II ) 求方程组  $Ax = b$  的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$ , 正交矩阵  $Q$  使得  $Q^T A Q$  为对角矩阵, 若  $Q$  的第 1 列为

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \text{ 求 } a, Q.$$

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数  $A$  及条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ .

(23) (本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个, 现从箱中随机取出 2 个球, 记  $X$  为取出的红球个数,  $Y$  为取出的白球个数.

( I ) 求随机变量  $(X, Y)$  的概率分布;

( II ) 求  $Cov(X, Y)$ .

## 2010 年全国硕士研究生入学统一考试

### 数学三试题参考答案

#### 一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \left( \frac{1}{x} - a \right) e^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 - e^x (1 - ax)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 - e^x + axe^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - e^x}{x} + \frac{axe^x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{axe^x}{x} = -1 + a = 1$$

所以  $a = 2$ .

(2) 【答案】 (A).

【解析】因  $\lambda y_1 - \mu y_2$  是  $y' + P(x)y = 0$  的解, 故  $(\lambda y_1 - \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0$ , 所以

$$\lambda [y_1' + P(x)y_1] - \mu [y_2' + P(x)y_2] = 0,$$

而由已知  $y_1' + P(x)y_1 = q(x)$ ,  $y_2' + P(x)y_2 = q(x)$ , 所以

$$(\lambda - \mu)q(x) = 0, \quad \textcircled{1}$$

又由于一阶次微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  是非齐的, 由此可知  $q(x) \neq 0$ , 所以

$$\lambda - \mu = 0.$$

由于  $\lambda y_1 + \mu y_2$  是非齐次微分方程  $y' + P(x)y = q(x)$  的解, 所以

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x),$$

整理得

$$\lambda [y_1' + P(x)y_1] + \mu [y_2' + P(x)y_2] = q(x),$$

即

$$(\lambda + \mu)q(x) = q(x), \text{ 由 } q(x) \neq 0 \text{ 可知 } \lambda + \mu = 1, \quad \textcircled{2}$$

由①②求解得  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ , 故应选 (A).

(3) 【答案】 (B).

【解析】  $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$ ,

$$\{f[g(x)]\}'' = \{f'[g(x)] \cdot g'(x)\}' = f''[g(x)] \cdot [g'(x)]^2 + f'[g(x)] \cdot g''(x)$$

由于  $g(x_0) = a$  是  $g(x)$  的极值, 所以  $g'(x_0) = 0$ . 所以

$$\{f[g(x_0)]\}'' = f'[g(x_0)] \cdot g''(x_0) = f'(a) \cdot g''(x_0)$$

由于  $g''(x_0) < 0$ , 要使  $\{f[g(x)]\}'' < 0$ , 必须有  $f'(a) > 0$ , 故答案为 B.

(4) 【答案】 (C).

【解析】因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{10}} \frac{1}{10} = +\infty$ , 所以, 当  $x$  充分大时,  $h(x) > g(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 \frac{\ln^9 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} \\ &= 10 \cdot 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \dots = 10 \cdot 9 \dots 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

所以当  $x$  充分大时,  $f(x) < g(x)$ , 故当  $x$  充分大,  $f(x) < g(x) < h(x)$ .

(5) 【答案】 (A).

【解析】 由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示, 所以  $r(\text{I}) \leq r(\text{II})$ , 即

$$r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s$$

若向量组 I 线性无关, 则  $r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = r$ , 所以  $r = r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s$ , 即

$r \leq s$ , 选 (A).

(6) 【答案】 (D).

【解析】 设  $\lambda$  为  $A$  的特征值, 由于  $A^2 + A = O$ , 所以  $\lambda^2 + \lambda = 0$ , 即  $(\lambda + 1)\lambda = 0$ , 这样  $A$  的特征值只能为  $-1$  或  $0$ .

由于  $A$  为实对称矩阵, 故  $A$  可相似对角化, 即  $A \sim \Lambda$ ,

$$r(A) = r(\Lambda) = 3, \text{ 因此, } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) 【答案】 (C).

【解析】 离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中  $F(x)$  的形式, 得到随机变量  $X$  既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$$P\{X = 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}, \text{ 故本题选}$$

(C).

(8) 【答案】 (A).

$$\text{【解析】 根据题意知, } f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

利用概率密度的性质:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ , 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b = 1$$

所以整理得到  $2a + 3b = 4$ , 故本题应选 (A).

## 二、填空题

(9) 【答案】 -1.

【解析】  $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = x \int_0^x \sin t^2 dt$ , 令  $x = 0$ , 得  $y = 0$ , 等式两端对  $x$  求导:

$$e^{-(x+y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$$

将  $x = 0, y = 0$  代入上式, 得  $1 + \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ . 所以  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = -1$ .

(10) 【答案】  $\frac{\pi^2}{4}$ .

【解析】 根据绕  $x$  轴旋转公式, 有

$$\begin{aligned} V &= \int_e^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_e^{+\infty} \pi \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \\ &= \pi \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{1+\ln^2 x} = \pi \cdot [\arctan(\ln x)]_e^{+\infty} = \pi \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(11) 【答案】  $p \cdot e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$ .

【解析】 由弹性的定义, 得  $\frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R} = 1 + p^3$ , 所以  $\frac{dR}{R} = \left( \frac{1}{p} + p^2 \right) dp$ , 即

$\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^2 + C$ , 又  $R(1) = 1$ , 所以  $C = -\frac{1}{3}$ . 故  $\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^2 - \frac{1}{3}$ , 因此

$$R = p \cdot e^{\frac{1}{3}(p^2-1)}.$$

(12) 【答案】  $b = 3$ .

【解析】 函数为  $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ , 它的一阶导数为  $y' = 3x^2 + 2ax + b$ ; 二阶导数为

$y'' = 6x + 2a$ , 又因为  $(-1, 0)$  是拐点, 所以  $y''\Big|_{x=-1} = 0$ , 得  $-\frac{a}{3} = -1$ , 所以  $a = 3$ , 又因为曲线

过点  $(-1, 0)$ , 所以将  $x = -1, y = 0$  代入曲线方程, 得  $b = 3$ .

(13) 【答案】 3.

【解析】 由于  $A(A^{-1} + B)B^{-1} = (E + AB)B^{-1} = B^{-1} + A$ , 所以

$$|A + B^{-1}| = |A(A^{-1} + B)B^{-1}| = |A| |A^{-1} + B| |B^{-1}|$$

因为  $|B| = 2$ , 所以  $|B^{-1}| = |B|^{-1} = \frac{1}{2}$ , 因此

$$|A+B^{-1}| = |A||A^{-1}+B||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

(14) 【答案】  $\sigma^2 + \mu^2$ .

$$\text{【解析】 } E(T) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} nE(X^2) = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

三、解答题

$$(15) \text{【解析】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^x - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{x^x-1}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^x-1}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}-1}\right)}{\ln x}}$$

其中

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}-1}\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{\ln x}{x}-1}\right)^{-1} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1}{\ln x} - 1\right) = -1.$$

故原式 =  $e^{-1}$ .

(16) 【解析】 积分区域  $D = D_1 \cup D_2$ , 其中  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$\iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy$$

因为区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 被积函数  $3x^2y + y^3$  是  $y$  的奇函数, 所以

$$\iint_D (3x^2y + y^3) dx dy = 0.$$

$$\iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \left[ \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \right]$$

$$= 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy = 2 \int_0^1 \left( -\frac{9}{4} y^4 + 2y^2 + \frac{1}{4} \right) dy = \frac{14}{15}.$$

(17) 【解析】 令  $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$ , 用拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$$

求解得六个点:  $A(1, \sqrt{5}, 2), B(-1, -\sqrt{5}, -2),$



$$C(1, -\sqrt{5}, 2), D(-1, \sqrt{5}, -2),$$

$$E(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), F(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}).$$

由于在点  $A$  与  $B$  点处,  $u = 5\sqrt{5}$ ; 在点  $C$  与  $D$  处,  $u = -5\sqrt{5}$ ; 在点  $E$  与  $F$  处,  $u = 0$

又因为该问题必存在最值, 并且不可能在其它点处, 所以  $u_{\max} = 5\sqrt{5}$ ,  $u_{\min} = -5\sqrt{5}$ .

(18) 【解析】 (I) 当  $0 < x < 1$  时  $0 < \ln(1+x) < x$ , 故  $[\ln(1+t)]^n < t^n$ , 所以

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n < |\ln t| t^n,$$

则

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

(II)  $\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$ , 故由

$$0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

(19) 【解析】 (I) 因为  $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx$ , 又因为  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 所以由积分中值定理得, 至少有一点  $\eta \in [0, 2]$ , 使得

$$\int_0^2 f(x) dx = f(\eta) \cdot (2-0)$$

即  $2f(0) = 2f(\eta)$ , 所以存在  $\eta \in [0, 2]$ , 使得  $f(\eta) = f(0)$ .

(II) 因为  $f(2) + f(3) = 2f(0)$ , 即  $\frac{f(2) + f(3)}{2} = f(0)$ , 又因为  $f(x)$  在  $[2, 3]$  上连

续, 由介值定理知, 至少存在一点  $\eta_1 \in [2, 3]$  使得  $f(\eta_1) = f(0)$ .

因为  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $[0, 2]$  上可导, 且  $f(0) = f(2)$ , 所以由罗尔中值定理知, 存在  $\xi_1 \in (0, 2)$ , 有  $f'(\xi_1) = 0$ .

又因为  $f(x)$  在  $[2, \eta_1]$  上连续, 在  $(2, \eta_1)$  上可导, 且  $f(2) = f(0) = f(\eta_1)$ , 所以由罗尔中值定理知, 存在  $\xi_2 \in (2, \eta_1)$ , 有  $f'(\xi_2) = 0$ .

又因为  $f(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上二阶可导, 且  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ , 所以由罗尔中值定理, 至少有一点  $Ax = b \subset (0, 3)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1: (I) 已知  $Ax = b$  有 2 个不同的解, 故  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

当  $\lambda = 1$  时,  $\bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , 此时,  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , 故  $Ax = b$  无解 (舍

去).

当  $\lambda = -1$  时,  $\bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right)$ , 由于  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 所以  $a = -2$ , 故  $\lambda = -1$ ,  $a = -2$ .

方法 2: 已知  $Ax = b$  有 2 个不同的解, 故  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 因此  $|A| = 0$ , 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0,$$

知  $\lambda = 1$  或  $-1$ .

当  $\lambda = 1$  时,  $r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2$ , 此时,  $Ax = b$  无解, 因此  $\lambda = -1$ . 由  $r(A) = r(\bar{A})$ , 得  $a = -2$ .

(II) 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

可知原方程组等价于  $\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ , 写成向量的形式, 即  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

因此  $Ax = b$  的通解为  $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  为任意常数.

(21) 【解析】由于  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$ , 存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q$  为对角阵, 且  $Q$  的第

一列为  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ , 故  $A$  对应于  $\lambda_1$  的特征向量为  $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ .

根据特征值和特征向量的定义, 有  $A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ , 即

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 由此可得 } a = -1, \lambda_1 = 2. \text{ 故 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0,$$

可得  $A$  的特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$ .

由  $(\lambda_2 E - A)x = 0$ , 即  $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ , 可解得对应于  $\lambda_2 = -4$  的线性无关的

特征向量为  $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$ .

由  $(\lambda_3 E - A)x = 0$ , 即  $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ , 可解得对应于  $\lambda_3 = 5$  的特征向量为

$$\xi_3 = (1, -1, 1)^T.$$

由于  $A$  为实对称矩阵,  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  为对应于不同特征值的特征向量, 所以  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  相互正交, 只需单位化:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \eta_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \eta_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$$\text{取 } Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度  $f(x, y)$  后, 要求条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$ , 可以根据条件概率公式  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$  来进行计算. 本题中还有待定参

数,  $A$  要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2 - x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A\sqrt{\pi} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

根据概率密度性质有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi, \text{ 即 } A = \pi^{-1},$$

故  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$

当  $-\infty < x < +\infty$  时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{A\sqrt{\pi} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(23) 【解析】(I)  $X$  的所有可能取值为 0, 1,  $Y$  的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ 其中 } X=0, Y=0 \text{ 表示取到的两个球都是黑球;}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \text{ 其中 } X=0, Y=1 \text{ 表示取到的一个是白球, 一个是}$$

黑球;

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \text{ 其中 } X=0, Y=2 \text{ 表示取到的两个球都是白球;}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ 其中 } X=1, Y=0 \text{ 表示取到的一个是红球, 一个是}$$

黑球;

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}, \text{ 其中 } X=1, Y=1 \text{ 表示取到的一个是红球, 一个是白}$$

球;

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{0}{C_6^2} = 0,$$

因此二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的概率分布为

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

$$(II) \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{2}{15} = \frac{2}{15}, \quad E(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}.$$