

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设 y_1, y_2 是一阶非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()

- (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.
 (C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

【答案解析】见真题理论验证强化指导部分数二试题一(2).

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$, 若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 ()

- (A) $f'(a) < 0$. (B) $f'(a) > 0$. (C) $f''(a) < 0$. (D) $f''(a) > 0$.

(4) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ()

- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$. (B) $h(x) < g(x) < f(x)$.
 (C) $f(x) < g(x) < h(x)$. (D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

(5) 设向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 下列命题正确的是 ()

- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$.
 (B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.
 (C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$.
 (D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(7) \quad \text{设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \text{ 则 } P\{X=1\} = \\ 1-e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

()

$$(A) 0. \quad (B) \frac{1}{2}. \quad (C) \frac{1}{2} - e^{-1}. \quad (D) 1 - e^{-1}.$$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leq 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases} (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足 ()

$$(A) 2a + 3b = 4. \quad (B) 3a + 2b = 4. \\ (C) a + b = 1. \quad (D) a + b = 2.$$

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

$$(9) \text{ 设可导函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } \int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt \text{ 确定, 则 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) \text{ 设位于曲线 } y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}} (e \leq x < +\infty) \text{ 下方, } x \text{ 轴上方的无界区域为 } G, \text{ 则 } G \text{ 绕 } x$$

轴旋转一周所得空间区域的体积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

$$(11) \text{ 设某商品的收益函数为 } R(p), \text{ 收益弹性为 } 1+p^3, \text{ 其中 } p \text{ 为价格, 且 } R(1)=1, \text{ 则 } R(p) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(12) \text{ 若曲线 } y = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{ 有拐点 } (-1, 0), \text{ 则 } b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(13) \text{ 设 } A, B \text{ 为 } 3 \text{ 阶矩阵, 且 } |A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=2, \text{ 则 } |A+B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(14) \text{ 设 } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 是来自总体 } N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0) \text{ 的简单随机样本, 统计量 } T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

, 则 $E(T) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 围成.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$,

(I) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$; ;

(II) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \text{ 求 } a, Q.$$

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23) (本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个, 现从箱中随机取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Cov(X, Y)$.

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题参考答案

一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 - e^x (1 - ax)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (1 - e^x + axe^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^x}{x} + \frac{axe^x}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{axe^x}{x} = -1 + a = 1$$

所以 $a = 2$.

(2) 【答案】 (A).

【解析】因 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解, 故 $(\lambda y_1 - \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0$, 所以

$$\lambda [y_1' + P(x)y_1] - \mu [y_2' + P(x)y_2] = 0,$$

而由已知 $y_1' + P(x)y_1 = q(x)$, $y_2' + P(x)y_2 = q(x)$, 所以

$$(\lambda - \mu)q(x) = 0, \quad \textcircled{1}$$

又由于一阶次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 是非齐的, 由此可知 $q(x) \neq 0$, 所以

$$\lambda - \mu = 0.$$

由于 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y' + P(x)y = q(x)$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + P(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x),$$

整理得

$$\lambda [y_1' + P(x)y_1] + \mu [y_2' + P(x)y_2] = q(x),$$

即

$$(\lambda + \mu)q(x) = q(x), \text{ 由 } q(x) \neq 0 \text{ 可知 } \lambda + \mu = 1, \quad \textcircled{2}$$

由①②求解得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, 故应选 (A).

(3) 【答案】 (B).

【解析】 $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$,

$$\{f[g(x)]\}'' = \{f'[g(x)] \cdot g'(x)\}' = f''[g(x)] \cdot [g'(x)]^2 + f'[g(x)] \cdot g''(x)$$

由于 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 所以 $g'(x_0) = 0$. 所以

$$\{f[g(x_0)]\}'' = f'[g(x_0)] \cdot g''(x_0) = f'(a) \cdot g''(x_0)$$

由于 $g''(x_0) < 0$, 要使 $\{f[g(x)]\}'' < 0$, 必须有 $f'(a) > 0$, 故答案为 B.

(4) 【答案】 (C).

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{10}} \frac{1}{10} = +\infty$, 所以, 当 x 充分大时, $h(x) > g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 \frac{\ln^9 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} \\ &= 10 \cdot 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \dots = 10 \cdot 9 \dots 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 10! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

所以当 x 充分大时, $f(x) < g(x)$, 故当 x 充分大, $f(x) < g(x) < h(x)$.

(5) 【答案】 (A).

【解析】 由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示, 所以 $r(\text{I}) \leq r(\text{II})$, 即

$$r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s$$

若向量组 I 线性无关, 则 $r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = r$, 所以 $r = r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \leq r(\beta_1, \dots, \beta_s) \leq s$, 即

$r \leq s$, 选 (A).

(6) 【答案】 (D).

【解析】 设 λ 为 A 的特征值, 由于 $A^2 + A = O$, 所以 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 即 $(\lambda + 1)\lambda = 0$, 这样 A 的特征值只能为 -1 或 0 .

由于 A 为实对称矩阵, 故 A 可相似对角化, 即 $A \sim \Lambda$,

$$r(A) = r(\Lambda) = 3, \text{ 因此, } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) 【答案】 (C).

【解析】 离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中 $F(x)$ 的形式, 得到随机变量 X 既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$$P\{X=1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}, \text{ 故本题选}$$

(C).

(8) 【答案】 (A).

$$\text{【解析】 根据题意知, } f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

利用概率密度的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b = 1$$

所以整理得到 $2a + 3b = 4$, 故本题应选 (A).

二、填空题

(9) 【答案】 -1.

【解析】 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = x \int_0^x \sin t^2 dt$, 令 $x = 0$, 得 $y = 0$, 等式两端对 x 求导:

$$e^{-(x+y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2.$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式, 得 $1 + \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$. 所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = -1$.

(10) 【答案】 $\frac{\pi^2}{4}$.

【解析】 根据绕 x 轴旋转公式, 有

$$\begin{aligned} V &= \int_e^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_e^{+\infty} \pi \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \\ &= \pi \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{1+\ln^2 x} = \pi \cdot [\arctan(\ln x)]_e^{+\infty} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

(11) 【答案】 $p \cdot e^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

【解析】 由弹性的定义, 得 $\frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R} = 1 + p^3$, 所以 $\frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{p} + p^2 \right) dp$, 即

$\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^2 + C$, 又 $R(1) = 1$, 所以 $C = -\frac{1}{3}$. 故 $\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^2 - \frac{1}{3}$, 因此

$$R = p \cdot e^{\frac{1}{3}(p^2-1)}.$$

(12) 【答案】 $b = 3$.

【解析】 函数为 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$, 它的一阶导数为 $y' = 3x^2 + 2ax + b$; 二阶导数为

$y'' = 6x + 2a$, 又因为 $(-1, 0)$ 是拐点, 所以 $y'' \Big|_{x=-1} = 0$, 得 $-\frac{a}{3} = -1$, 所以 $a = 3$, 又因为曲线

过点 $(-1, 0)$, 所以将 $x = -1, y = 0$ 代入曲线方程, 得 $b = 3$.

(13) 【答案】 3.

【解析】 由于 $A(A^{-1} + B)B^{-1} = (E + AB)B^{-1} = B^{-1} + A$, 所以

$$|A + B^{-1}| = |A(A^{-1} + B)B^{-1}| = |A| |A^{-1} + B| |B^{-1}|$$

因为 $|B| = 2$, 所以 $|B^{-1}| = |B|^{-1} = \frac{1}{2}$, 因此

$$|A+B^{-1}| = |A||A^{-1}+B||B^{-1}| = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3.$$

(14) 【答案】 $\sigma^2 + \mu^2$.

$$\text{【解析】 } E(T) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} nE(X^2) = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

三、解答题

$$(15) \text{ 【解析】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^x - 1\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{x^x-1}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^x-1}\right)}{\ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)}{\ln x}}$$

其中

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1\right)^{-1} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1}{\ln x} - 1\right) = -1.$$

故原式 = e^{-1} .

(16) 【解析】 积分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$\iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy$$

因为区域 D 关于 x 轴对称, 被积函数 $3x^2y + y^3$ 是 y 的奇函数, 所以

$$\iint_D (3x^2y + y^3) dx dy = 0.$$

$$\iint_D (x+y)^3 dx dy = \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \left[\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \right]$$

$$= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy = 2 \int_0^1 \left(-\frac{9}{4} y^4 + 2y^2 + \frac{1}{4} \right) dy = \frac{14}{15}.$$

(17) 【解析】 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$, 用拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$$

求解得六个点: $A(1, \sqrt{5}, 2), B(-1, -\sqrt{5}, -2),$

$$C(1, -\sqrt{5}, 2), D(-1, \sqrt{5}, -2), \\ E(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), F(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}).$$

由于在点 A 与 B 点处, $u = 5\sqrt{5}$; 在点 C 与 D 处, $u = -5\sqrt{5}$; 在点 E 与 F 处, $u = 0$

又因为该问题必存在最值, 并且不可能在其它点处, 所以 $u_{\max} = 5\sqrt{5}$, $u_{\min} = -5\sqrt{5}$.

(18) 【解析】 (I) 当 $0 < x < 1$ 时 $0 < \ln(1+x) < x$, 故 $[\ln(1+t)]^n < t^n$, 所以

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n < |\ln t| t^n,$$

则
$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

(II)
$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2},$$
 故由

$$0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(19) 【解析】 (I) 因为 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx$, 又因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 所以由积分中值定理得, 至少有一点 $\eta \in [0, 2]$, 使得

$$\int_0^2 f(x) dx = f(\eta) \cdot (2-0)$$

即 $2f(0) = 2f(\eta)$, 所以存在 $\eta \in [0, 2]$, 使得 $f(\eta) = f(0)$.

(II) 因为 $f(2) + f(3) = 2f(0)$, 即 $\frac{f(2) + f(3)}{2} = f(0)$, 又因为 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连

续, 由介值定理知, 至少存在一点 $\eta_1 \in [2, 3]$ 使得 $f(\eta_1) = f(0)$.

因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $[0, 2]$ 上可导, 且 $f(0) = f(2)$, 所以由罗尔中值定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, 2)$, 有 $f'(\xi_1) = 0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[2, \eta_1]$ 上连续, 在 $(2, \eta_1)$ 上可导, 且 $f(2) = f(0) = f(\eta_1)$, 所以由罗尔中值定理知, 存在 $\xi_2 \in (2, \eta_1)$, 有 $f'(\xi_2) = 0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上二阶可导, 且 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, 所以由罗尔中值定理, 至少有一点 $Ax = b \subset (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1: (I) 已知 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

当 $\lambda = 1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, 此时, $r(A) \neq r(\bar{A})$, 故 $Ax = b$ 无解 (舍

去).

当 $\lambda = -1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right)$, 由于 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 所以 $a = -2$, 故 $\lambda = -1$, $a = -2$.

方法 2: 已知 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 因此 $|A| = 0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0,$$

知 $\lambda = 1$ 或 -1 .

当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = 1 \neq r(\bar{A}) = 2$, 此时, $Ax = b$ 无解, 因此 $\lambda = -1$. 由 $r(A) = r(\bar{A})$, 得 $a = -2$.

(II) 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

可知原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

因此 $Ax = b$ 的通解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21) 【解析】由于 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角阵, 且 Q 的第

一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 故 A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义, 有 $A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, 即

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 由此可得 } a = -1, \lambda_1 = 2. \text{ 故 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0,$$

可得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 5$.

由 $(\lambda_2 E - A)x = 0$, 即 $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, 可解得对应于 $\lambda_2 = -4$ 的线性无关的

特征向量为 $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$.

由 $(\lambda_3 E - A)x = 0$, 即 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, 可解得对应于 $\lambda_3 = 5$ 的特征向量为

$$\xi_3 = (1, -1, 1)^T.$$

由于 A 为实对称矩阵, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量, 所以 ξ_1, ξ_2, ξ_3 相互正交, 只需单位化:

$$\eta_1 = \frac{\xi_1}{\|\xi_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T, \eta_2 = \frac{\xi_2}{\|\xi_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T, \eta_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$$\text{取 } Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}.$$

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度 $f(x, y)$ 后, 要求条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$, 可以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 来进行计算. 本题中还有待定参

数, A 要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2 - x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A \sqrt{\pi} e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

根据概率密度性质有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \pi, \text{ 即 } A = \pi^{-1},$$

故 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{A \sqrt{\pi} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(23) 【解析】(I) X 的所有可能取值为 0, 1, Y 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P\{X=0, Y=0\} = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ 其中 } X=0, Y=0 \text{ 表示取到的两个球都是黑球;}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \text{其中 } X=0, Y=1 \text{ 表示取到的一个是白球, 一个是}$$

黑球;

$$P\{X=0, Y=2\} = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}, \text{其中 } X=0, Y=2 \text{ 表示取到的两个球都是白球;}$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{其中 } X=1, Y=0 \text{ 表示取到的一个是红球, 一个是}$$

黑球;

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}, \text{其中 } X=1, Y=1 \text{ 表示取到的一个是红球, 一个是白}$$

球;

$$P\{X=1, Y=2\} = \frac{0}{C_6^2} = 0,$$

因此二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

	Y				
	$X \backslash$				
		0	1	2	
	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
		$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

$$(II) \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{2}{15} = \frac{2}{15}, \quad E(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}.$$