

2011

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则()

(A) $k=1, c=4$.

(B) $k=1, c=-4$.

(C) $k=3, c=4$.

(D) $k=3, c=-4$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = ()$

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.

(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是()

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛. (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关

系是()

(A) $I < J < K$.

(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.

(D) $K < J < I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得

单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A = ()$

(A) $P_1 P_2$.

(B) $P_1^{-1} P_2$.

(C) $P_2 P_1$.

(D) $P_2 P_1^{-1}$.

(6) 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2

2011

为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为()

- (A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$. (B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$.
(C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$. (D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是()

- (A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$.
(C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 X 的简

单随机样本, 则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$ ()

- (A) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$. (B) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$.
(C) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$. (D) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$.

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

(10) 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____.

(11) 曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

(12) 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为_____.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 的秩为 1, A 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为_____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

2011

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值,

$$z = f[x + y, f(x, y)], \text{ 求 } \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)}.$$

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

(18) (本题满分 10 分)

证明 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有 2 实根.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有连续导数, $f(0) = 1$, 且 $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy$,

$D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t - x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$, 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$,

$\beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21) (本题满分 11 分)

$$A \text{ 为三阶实对称矩阵, } A \text{ 的秩为 } 2, \text{ 即 } r(A) = 2, \text{ 且 } A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

2011

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0, x + y = 2$ 与 $y = 0$ 所围成的区域.

(I) 求边缘概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 【答案】(C).

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x}{cx^k} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (3 - \cos 2x - 2 \cos^2 x)}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos 2x - 2 \cos^2 x}{cx^{k-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - (2 \cos^2 x - 1) - 2 \cos^2 x}{cx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos^2 x}{cx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x}{cx^{k-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{cx^{k-3}} = 1. \end{aligned}$$

所以 $c = 4, k = 3$, 故答案选(C).

(2) 【答案】(B).

$$\begin{aligned} \text{【解析】} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) - 2f(x^3) + 2f(0)}{x^3} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ & = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0). \end{aligned}$$

故答案选(B).

(3) 【答案】(A).

【解析】方法 1: 数项级数的性质: 收敛级数任意添加括号后仍收敛, 故(A)正确.

方法 2: 排除法, 举反例.

选项(B)取 $u_n = (-1)^n$, 这时 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散, 故选

项(B)错误;

2011

选项(C)取 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 这时 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

故选项(C)错误;

选项(D)取 $u_n = 1$, 这时 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散, 故选项(D)错

误. 故正确答案为(A).

(4) 【答案】(B).

【解析】因为 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$,

又因 $\ln x$ 是单调递增的函数, 所以 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$.

故正确答案为(B).

(5) 【答案】(D).

【解析】由于将 A 的第2列加到第1列得矩阵 B , 故

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

即 $AP_1 = B$, $A = BP_1^{-1}$.

由于交换 B 的第2行和第3行得单位矩阵, 故

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = E,$$

即 $P_2 B = E$, 故 $B = P_2^{-1} = P_2$. 因此, $A = P_2 P_1^{-1}$, 故选(D).

(6) 【答案】(C).

【解析】由于 η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的3个线性无关的解, 所以 $\eta_3 - \eta_1, \eta_2 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 即 $Ax = 0$ 的基础解系中至少有2个线性无关的解, 所以可排除(A)、(B)选项.

又因为 $A \frac{\eta_2 - \eta_3}{2} = 0$, 所以 $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2}$ 是 $Ax = 0$ 的解, 不是 $Ax = \beta$ 的解, 故排除(D)选项, 因此选(C).

事实上, 由于 η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的三个线性无关的解, 所以 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 即 $Ax = 0$ 的基础解系中至少有2个线性无关的解, 亦即 $3 - r(A) \geq 2$, 故

2011

$r(A) \leq 1$. 由于 $A \neq O$, 所以 $r(A) \geq 1$, 故 $r(A) = 1$. 这样, $Ax = 0$ 的基础解系中正好有 2 个线性无关的解, 由此知 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

因为 η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的解, 所以 $A\eta_2 = \beta, A\eta_3 = \beta$, 因此 $A \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} = \beta$, 所以 $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2}$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解.

由非齐次线性方程组解的结构, 可知 $Ax = \beta$ 的通解为

$$\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1).$$

(7) 【答案】(D).

【解析】选项(D)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)] dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} [F_2(x)dF_1(x) + F_1(x)dF_2(x)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d[F_1(x)F_2(x)] = F_1(x)F_2(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

所以 $f_1F_2(x) + f_2F_1(x)$ 为概率密度.

(8) 【答案】(D).

【解析】因为 $X_1, X_2, \dots, X_n \sim P(\lambda)$,

所以 $E(X_i) = \lambda$, $D(X_i) = \lambda$, 从而有

$$E(T_1) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X) = E(X) = \lambda$$

$$\begin{aligned} E(T_2) &= E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n-1} E\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \frac{1}{n} E(X_n) \\ &= E(X) + \frac{1}{n} E(X) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lambda. \end{aligned}$$

因为 $1 < 1 + \frac{1}{n}$, 所以 $E(T_1) < E(T_2)$.

又因为 $D(T_1) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D(X) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{\lambda}{n}$.

2011

$$D(T_2) = D\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot D\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) + \frac{1}{n^2} D(X_n)$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot D(X) + \frac{1}{n^2} \cdot D(X) = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}\right) \lambda .$$

由于当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2}$, 所以 $D(T_1) < D(T_2)$.

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 【答案】 $e^{3x}(1+3x)$.

【解析】 因为 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}} = x \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}} \right]^{3t \cdot \frac{x}{t}} = x \cdot e^{3x}$,

所以, $f'(x) = e^{3x}(1+3x)$.

(10) 【答案】 $(1+2 \ln 2)(dx - dy)$.

【解析】 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = e^{\frac{x}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)}$,

$$\frac{dz}{dx} = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[\frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x}{y}} \right], \quad \frac{dz}{dy} = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[-\frac{x}{y^2} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \cdot \frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x}{y}} \right],$$

所以, $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,1)} = 2 \ln 2 + 1$, $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{(1,1)} = -1 - 2 \ln 2$,

从而 $\left. dz \right|_{(1,1)} = (1+2 \ln 2)dx - (1+2 \ln 2)dy$ 或 $\left. dz \right|_{(1,1)} = (1+2 \ln 2)(dx - dy)$.

(11) 【答案】 $y = -2x$.

【解析】 方程 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 的两端对 x 求导, 有

$$\sec^2\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (1 + y') = e^y y',$$

2011

将 $x=0, y=0$ 代入上式, 有 $\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}(1+y') = y'$, 解得 $y'|_{(0,0)} = -2$,

故切线方程为: $y = -2x$.

(12) 【答案】 $\frac{4}{3}\pi$.

【解析】如图 2 所示:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 y^2 dx \\ &= \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

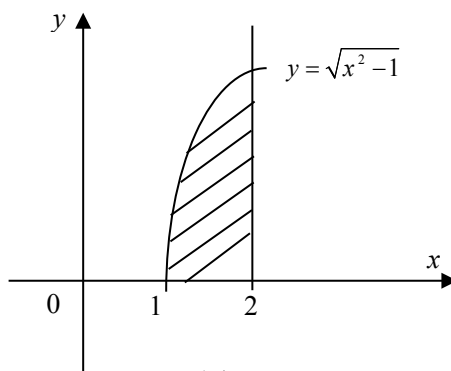


图 2

(13) 【答案】 $3y_1^2$.

【解析】因为 A 的各行元素之和为 3, 所以 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 故 3 为矩阵 A 的特征值.

由 $r(A) = 1$ 知矩阵 A 有两个特征值为零, 从而 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

由于二次型在正交变换下标准形前面的系数即为二次型所对应矩阵的特征值, 所以二次型在正交变换下的标准形为 $3y_1^2$.

(14) 【答案】 $\mu(\mu^2 + \sigma^2)$.

【解析】根据题意, 二维随机变量 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$. 因为 $\rho_{xy} = 0$, 所以由

二维正态分布的性质知随机变量 X, Y 独立, 所以 XY^2 . 从而有

$$E(XY^2) = E(X)E(Y^2) = \mu[D(Y) + E^2(Y)] = \mu(\mu^2 + \sigma^2).$$

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

2011

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1+2\sin x}} \cdot 2 \cos x - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

(16) (本题满分 10 分)

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'[(x+y), f(x,y)] + f_2'[(x+y), f(x,y)] \cdot f_1'(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}''[(x+y), f(x+y)] \cdot 1$$

$$+ f_{12}''[(x+y), f(x+y)] \cdot f_2'(x,y)$$

$$+ \left\{ f_{21}''[(x+y), f(x+y)] + f_{22}''[(x+y), f(x+y)] f_2'(x,y) \right\} \cdot f_1'(x,y)$$

$$+ f_2'[(x+y), f(x+y)] \cdot f_{12}''(x,y)$$

由于 $f(1,1) = 2$ 为 $f(u,v)$ 的极值, 故 $f_1'(1,1) = f_2'(1,1) = 0$,

所以, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}''(2,2) + f_2'(2,2) \cdot f_{12}''(1,1)$.

(17) (本题满分 10 分)

【解析】 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 所以

2011

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\arcsin t + \ln t^2}{t} \cdot 2t dt = 2 \int (\arcsin t + \ln t^2) dt \\
 &= 2t \cdot \arcsin t - 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + 2t \cdot \ln t^2 - 2 \int t \cdot \frac{2t}{t^2} dt \\
 &= 2t \cdot \arcsin t + \int \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} + 2t \cdot \ln t^2 - 4t \\
 &= 2t \cdot \arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + 2t \cdot \ln t^2 - 4t + C \\
 &= 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

(18) (本题满分 10 分)

【解析】设 $f(x) = 4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$,

则
$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2},$$

令 $f'(x) = 0$, 解得驻点 $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$.

所以, 当 $x < -\sqrt{3}$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 单调递减; 当 $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 单调递增; 当 $x > \sqrt{3}$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 单调递减.

又当 $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 时 $f(x) > 0$, 且 $f(-\sqrt{3}) = 0$, 故 $x \in (-\infty, \sqrt{3})$ 时只有一个零点;

又 $f(\sqrt{3}) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \right) = -\infty < 0$, 由

零点定理可知, 存在 $x_0 \in (\sqrt{3}, +\infty)$, 使 $f(x_0) = 0$;

所以, 方程 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两实根.

(19) (本题满分 10 分)

【解析】
$$\iint_{D_t} f(t) dx dy = \frac{1}{2} t^2 f(t),$$

2011

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy &= \int_0^t dx \int_0^{t-x} f'(x+y) dy \\ &= \int_0^t (f(t) - f(x)) dx \\ &= tf(t) - \int_0^t f(x) dx \end{aligned}$$

由题设有 $tf(t) - \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2}t^2 f(t)$,

上式两端求导, 整理得

$$(2-t)f'(t) = 2f(t),$$

为变量可分离微分方程, 解得 $f(t) = \frac{C}{(t-2)^2}$,

带入 $f(0) = 1$, 得 $C = 4$. 所以, $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}, 0 \leq x \leq 1$.

(20) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 对 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 进行初等行变换:

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & a & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & a-3 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

当 $a = 5$ 时, $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2 \neq r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1) = 3$, 此时, α_1 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示,

故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示.

(II) 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 进行初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

2011

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right), \end{aligned}$$

故 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, $\beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

(21) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 由于 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 设 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, 则

$A(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha_1, \alpha_2)$, 即 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$, 而 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, 知 A 的特征值为

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1 (k_1 \neq 0)$, $k_2\alpha_2 (k_2 \neq 0)$.

由于 $r(A) = 2$, 故 $|A| = 0$, 所以 $\lambda_3 = 0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵, 故不同特征值对应的特征向量相互正交, 设 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2^T \alpha_3 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

解此方程组, 得 $\alpha_3 = (0, 1, 0)^T$, 故 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3 (k_3 \neq 0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交, 只需单位化:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \beta_3 = \frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|} = (0, 1, 0)^T.$$

令 $Q = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 则 $Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = Q \Lambda Q^T$$

2011

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

(22) (本题满分 11 分)

【解析】(I) 因为 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$, 所以 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 1 - P\{X^2 = Y^2\} = 0$.

即 $P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$$P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0, Y = -1\} - P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{3};$$

$$P\{X = 1, Y = -1\} = P\{Y = -1\} - P\{X = 0, Y = -1\} = \frac{1}{3};$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{Y = 1\} - P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{1}{3}.$$

即 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II) Z 的所有可能取值为 $-1, 0, 1$.

$$P\{Z = -1\} = P\{X = 1, Y = -1\} = \frac{1}{3}.$$

2011

$$P\{Z=1\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{3}.$$

$$P\{Z=0\} = 1 - P\{Z=1\} - P\{Z=-1\} = \frac{1}{3}.$$

$Z = XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III) 因为 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,

其中

$$E(XY) = E(Z) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0, \quad E(Y) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

所以 $E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$, 即 X, Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$.

(23) (本题满分 11 分)

【解析】二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, y < x < 2 - y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

(I) 当 $0 < x < 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 1 dy = x$.

当 $1 \leq x < 2$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{2-x} 1 dy = 2 - x$.

$$X \text{ 的边缘概率密度为 } f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(II) 当 $0 < y < 1$ 时, Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_y^{2-y} 1 dx = 2 - 2y$.

当 $0 < y < 1$ 时, $f_{X|Y}(x|y)$ 有意义, 条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2y}, & y < x < 2 - y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$