2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x \to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　）

（A） $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

（B） $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

（C） $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

（D） $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

（2）函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3

（3）设 D_k 是圆域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k = \iint\limits_{D_k} (y-x)dxdy \ (k = 1,2,3,4)$ ，则（　　）

（A） $I_1 > 0$

（B） $I_2 > 0$

（C） $I_3 > 0$

（D） $I_4 > 0$

（4）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　　）

（A）若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

（B） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$

（C） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则存在常数 $P > 1$, 使 $\lim\limits_{n \to \infty} n^P a_n$ 存在

（D）若存在常数 $P>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^P a_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$,则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（6）矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A） $a=0,b=2$

（B） $a=0,b$为任意常数

（C） $a=2,b=0$

（D） $a=2,b$为任意常数

（7）设 X_1，X_2 X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2\le X_j\le 2\}(j=1,2,3)$, 则（ ）

（A） $P_1>P_2>P_3$

（B） $P_2>P_1>P_3$

（C） $P_3>P_1>P_2$

（D） $P_1>P_3>P_2$

（8）设随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 的概率分布分别为，

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=($ $)$

（A） $\frac{1}{12}$

（B） $\frac{1}{8}$

（C） $\frac{1}{6}$

（D）$\dfrac{1}{2}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(0,1)$ 处有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$________。

（10）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=$________。

（11）求 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$________。

（12）微分方程 $y''-y'+\dfrac{1}{4}y=0$ 通解为 $y=$________。

（13）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若

$\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$,则$|A|=$____

（14）设随机变量 X 服从标准正态分布 $X\sim\mathrm{N}(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

（16）（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y, y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成.计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$ 。

（18）（本题满分 10 分）

设生产某产品的固定成本为 6000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $P=60-\dfrac{Q}{1000}$，（P 是单价，单位：元，Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

（1）该商品的边际利润。

（2）当 P=50 时的边际利润，并解释其经济意义。

（3）使得利润最大的定价 P。

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上可导，$f(0)=0$且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，证明

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$

（2）对（1）中的a，存在$\xi \in (0,a)$,使得$f'(\xi)=\frac{1}{a}$.

（20）（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$。

（21）（本题满分 11 分）

设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若α,β正交且均为单位向量，证明二次型f在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

（22）（本题满分 11 分）

设$\left(X,Y\right)$是二维随机变量，X的边缘概率密度为$f_X\left(x\right)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，在给定$X=x\left(0<x<1\right)$的条件下，$Y$的条件概率密度$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\begin{cases}\frac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1） 求$\left(X,Y\right)$的概率密度$f\left(x,y\right)$；

（2） Y的边缘概率密度$f_Y\left(y\right)$.

（23）（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$其中$\theta$为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$为来自总体$X$的简单随机样本.

（1）求θ的矩估计量；

（2）求θ的最大似然估计量.

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当$x\to 0$时，用$o(x)$表示比x高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　）

（A） $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$

（B） $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

（C） $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$

（D） $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

【答案】D

【解析】 $o(x)+o(x^2)=o(x)$，故 D 错误。

（2）函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3
【答案】C

【解析】由题意可知 $f(x)$ 的间断点为 $0,\pm1$。又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{x(x+1)\ln x}=1$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)}=1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^x-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{e^{x\ln x}-1}{x(x+1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x(x+1)\ln x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(-x)^x-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x\ln(-x)}-1}{x(x+1)\ln(-x)}=\lim_{x\to-1}\frac{x\ln(-x)}{x(x+1)\ln(-x)}=\infty$$

故 $f(x)$ 的可去间断点有 2 个。

（3）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy\ \left(k=1,2,3,4\right)$，则（　　）

（A） $I_1>0$

（B） $I_2>0$

（C） $I_3>0$

（D） $I_4>0$

【答案】B

【解析】令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则有

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy=\int_0^1 rdr\int_\alpha^\beta (r\sin\theta-r\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_\alpha^\beta$$

故当 $k=2$ 时，$\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\pi$，此时有 $I_2=\frac{2}{3}\Big|>0.$ 故正确答案选 B。

（4）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　　）

（A）若 $a_n>a_{n+1}$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

（B）若$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $P>1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^P a_n$ 存在

（D）若存在常数 $P>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^P a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

【答案】D

【解析】根据正项级数的比较判别法，当 $P>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^P a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 同敛散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 C 可逆，则（　　）
（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价
【答案】（B）

【解析】由 $C=AB$ 可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有 $A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（6）矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

（A）$a=0,b=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似

的充分必要条件为$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$的特征值为$2,b,0$。

又$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -a & -1 \\ -a & \lambda-b & -a \\ -1 & -a & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数。

（7）设X_1，X_2　X_3是随机变量，且X_1~N(0,1)，X_2~N(0, 2^2)，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2\le X_j\le 2\}(j=1,2,3)$, 则（　　）

（A）$P_1>P_2>P_3$

（B）$P_2>P_1>P_3$

（C）$P_3>P_1>P_2$

（D）$P_1>P_3>P_2$

【答案】（A）

【解析】由$X_1\sim N\left(0,1\right),X_2\sim N\left(0,2^2\right),X_3\sim N\left(5,3^2\right)$知，

$p_1=P\left\{-2\le X_1\le 2\right\}=P\left\{\left|X_1\right|\le 2\right\}=2\Phi\left(2\right)-1$，

$p_2=P\left\{-2\le X_2\le 2\right\}=P\left\{\left|X_2\right|\le 2\right\}=2\Phi\left(1\right)-1$，故$p_1>p_2$.

由根据$X_3\sim N\left(5,3^2\right)$及概率密度的对称性知，$p_1>p_2>p_3$，故选（A）

（8）设随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 的概率分布分别为，

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=($　　$)$

（A）$\dfrac{1}{12}$

（B）$\dfrac{1}{8}$

（C）$\dfrac{1}{6}$

（D）$\dfrac{1}{2}$

【答案】（C）

【解析】$P\left\{X+Y=2\right\}=P\left\{X=1,Y=1\right\}+P\left\{X=2,Y=0\right\}+P\left\{X=3,Y=-1\right\}$，又根据题意 X,Y 独立，故

$P\left\{X+Y=2\right\}=P\left\{X=1\right\}P\left\{Y=1\right\}+P\left\{X=2\right\}P\left\{Y=0\right\}+P\left\{X=3\right\}P\left\{Y=-1\right\}=\dfrac{1}{6}$，选（C）.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(0,1)$ 处有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$________。

【答案】-2

【解析】$y=x^2-x$ 在 $(1,0)$ 处的导数是 $y'(1)=1$，故 $f'(1)=1, f(1)=0$，

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}\times\left(-\frac{2n}{n+2}\right)=f'(1)\times(-2)=-2$$

（10）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________。

【答案】$2-2\ln 2$

【解析】原式为 $e^{x\ln(z+y)}=xy,$ 左右两边求导得：$xy[\ln(z+y)+x\cdot\dfrac{z_x}{z+y}]=y,$ 令 $x=1,y=2$

得 $z=0, z_x=2(1-\ln 2)$

（11）求 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ ________。

【答案】$\ln 2$

【解析】$\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\int\ln x\,d\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{1}{x(1+x)}dx=-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}\right)-\left(-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{1+x}\right)_{x=1}=\ln 2$$

（12）微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 通解为 $y=$________。

【答案】$e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1x+C_2\right)$

【解析】特征方程为 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0,\lambda=\frac{1}{2}$(二重根)，所以通解为 $y=e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1x+C_2\right)$

（13）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若

$\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}+\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$,则$|A|=$____

【答案】-1

【解析】

由$a_{ij}+A_{ij}=0$可知 $\quad A^T=-A^*$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

$$=-\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$$

从而有$|A|=\left|A^T\right|=\left|-A^*\right|=-|A|^2$，故 $|A|$=-1.

（14）设随机变量 X 服从标准正态分布 $X\sim\mathrm{N}(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$________。

【答案】$2e^2$

【解析】由 $X\sim N\left(0,1\right)$ 及随机变量函数的期望公式知

$$E\left(Xe^{2X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-4\right]}dx=2e^2.$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

【解析】因为当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$ 与 ax^n 为等价无穷小

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{ax^n}=1$

又因为：

$$1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$$
$$=1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos2x+\cos x\cdot\cos2x-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x$$
$$=1-\cos x+\cos x(1-\cos2x)+\cos x\cdot\cos2x(1-\cos3x)$$

即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\cos2x)+\cos x\cdot\cos2x(1-\cos3x)}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{ax^n}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n})$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)}{ax^n})$$

所以 $n=2$ 且 $\frac{1}{2a}+\frac{4}{2a}+\frac{9}{2a}=1\Rightarrow a=7$

（16）（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

【解析】由题意可得：

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

因为：$V_y=10V_x$ 所以 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成.计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$ 。

【解析】 $\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy$

$$=\int_0^2x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$$

$$=\frac{416}{3}$$

（18）（本题满分 10 分）

设生产某产品的固定成本为 6000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $P=60-\frac{Q}{1000}$，（P 是单价，单位：元，Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

（1）该商品的边际利润。

（2）当 P=50 时的边际利润，并解释其经济意义。

（3）使得利润最大的定价 P。

【解析】（I）设利润为 l，则 $l=PQ-(20Q+6000)=40Q-\frac{Q^2}{1000}-6000$

边际利润 $l'=40-\frac{Q}{500}$

（II）当 $P=50$ 时，边际利润为 20，

经济意义为：当 $P=50$ 时，销量每增加一个，利润增加 20

(III)令$l'=0$,得$Q=20000$，此时 $P=60-\frac{Q}{1000}=40$

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty]$上可导， $f(0)=0$且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，证明

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$

（2）对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$, 使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}.$

【答案】(I）证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2,\therefore\exists X,$当$x>X$时有 $f(x)>\frac{3}{2}$，

$f(x)$在$[0,X]$上连续，根据连续函数介值定理，存在 $a\in\left[0,X\right]$，使得$f(a)=1$

（II） $f(x)$ 在$[0,a]$上连续且可导，根据拉格朗日中值定理，

$f(a)-f(0)=f'(\xi)a=1,\xi\in(0,a)$，

故$\exists\xi\in(0,a)$，使得$f'(\xi)=\frac{1}{a}$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C 。

【解析】

由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设 $C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\-a&1&0&a&1\\0&-1&a&0&0\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&1+a\\0&-1&a&0&0\\0&1&-a&0&b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&1+a\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b-1-a\end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有$1+a=0,b-1-a=0$，即 $a=-1,b=0,$ 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，故有$\begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}$，其中$k_1$，$k_2$任意.

从而有$C = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

设二次型$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$，记$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（I）证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$；

（II）若α, β正交且均为单位向量，证明二次型f在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2 + y_2^2$。

【答案】(1)

$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1b_2)x_1x_2$$
$$+ (4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

则f的矩阵为$\begin{pmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$

$= 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

（2）令$A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，则$A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$，$A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \le r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2$

（22）（本题满分 11 分）

设(X, Y)是二维随机变量，X的边缘概率密度为$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，在给定$X = x(0 < x < 1)$的条件下，$Y$的条件概率密度$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（3）　求(X, Y)的概率密度$f(x, y)$；

（4）　Y的边缘概率密度$f_Y(y)$.

【答案】(1) $f\left(x,y\right)=f_{Y|X}\left(y|x\right)f_X\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2) $f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

【答案】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\frac{\theta}{x})=\theta$，令 $EX=\overline{X}$，故 θ 矩估计量为 $\overline{X}$.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

当 $x_i>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=0$，

得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$，所以得 θ 极大似然估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$.