

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1: 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

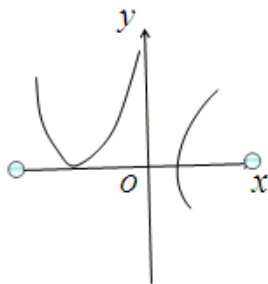
【答案】(D)

【解析】考查数列极限与子列极限的关系。

数列收敛,那么它的任何无穷子列均收敛,所以 A 与 C 正确;一个数列存在多个无穷子列并集包含原数列所有项,且这些子列均收敛于同一个值,则原数列是收敛的。B 正确, D 错,故选 D

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线

$y = f(x)$ 的拐点个数为 ()



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】(C)

【解析】根据拐点的必要条件,拐点可能是 $f''(x)$ 不存在的点或 $f''(x) = 0$ 的点处产生。所以

$y = f(x)$ 有三个点可能是拐点,根据拐点的定义,即凹凸性改变的点;二阶导函数 $f''(x)$ 符号发生改变点即为拐点。所以从图可知,拐点个数为 2, 故选 C.

(3) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续,则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \quad ()$$

$$(A) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$(B) \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$(C) 2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$$

$$(D) 2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$$

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下该二重积分要分成两个积分区域

$$D_1 = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2\sin\theta \right\} \quad D_2 = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta \right\}$$

所以 $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ ，选

B。

(4) 下列级数中发散的是()

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$(C) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} \quad (D) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

【答案】(C)

【解析】A 为正项级数，因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ ，所以根据正项级数的比值判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

收敛；B 为正项级数，因为 $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) : \frac{1}{n^{3/2}}$ ，根据 P 级数收敛准则，知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 收敛；

C, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ ，根据莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散，

所以根据级数收敛定义知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$ 发散; D 为正项级数, 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{n!}}{\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1, \text{ 所以根据正项级数的比值判别法}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛, 所以选 C。

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无

穷多解的充分必要条件为: ()

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$
 (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$ (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

【答案】(D)

【解析】 $(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix}$,

由 $r(A) = r(A, b) < 3$, 故 $a = 1$ 或 $a = 2$, 同时 $d = 1$ 或 $d = 2$. 故选 (D)

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中

$P = (e_1, e_2, e_3)$, 若 $Q = (e_1, -e_3, e_2)$ 则 $f = f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为()

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$
 (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x = Py$, 故 $f = x^T Ax = y^T (P^T AP)y = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. 且

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = PC$$

$$Q^T AQ = C^T (P^T AP) C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $f = x^T Ax = y^T (Q^T AQ) y = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ 。选 (A)

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则: ()

(A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$

(B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(D) $P(AB) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB \subset A, AB \subset B$, 按概率的基本性质, 我们有 $P(AB) \leq P(A)$ 且 $P(AB) \leq P(B)$,

从而 $P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$, 选(C)。

(8) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本, \bar{X} 为样本均

值, 则 $E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] =$ ()

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$

(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

(D) $mn\theta(1-\theta)$

【答案】(B)

【解析】根据样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 的性质 $E(S^2) = D(X)$, 而 $D(X) = m\theta(1-\theta)$,

从而 $E[\sum_{i=1}^n (X_i - X)^2] = (n-1)E(S^2) = m(n-1)\theta(1-\theta)$, 选(B) .

二、填空题: 9: 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】 原极限 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】 因为 $f(x)$ 连续, 所以 $\varphi(x)$ 可导, 所以 $\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt + 2x^2 f(x^2)$;

因为 $\varphi(1) = 1$, 所以 $\varphi(1) = \int_0^1 f(t)dt = 1$

又因为 $\varphi'(1) = 5$, 所以 $\varphi'(1) = \int_0^1 f(t)dt + 2f(1) = 5$

故 $f(1) = 2$

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$

【解析】 当 $x = 0, y = 0$ 时带入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$, 得 $z = 0$.

对 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 求微分, 得

$$\begin{aligned} d(e^{x+2y+3z} + xyz) &= e^{x+2y+3z} d(x+2y+3z) + d(xyz) \\ &= e^{x+2y+3z} (dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz \\ &= 0 \end{aligned}$$

把 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式, 得 $dx + 2dy + 3dz = 0$

所以 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

【答案】 $y(x) = e^{-2x} + 2e^x$

【解析】 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根为 $\lambda = -2, \lambda = 1$, 所以该齐次微分方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$, 因为 $y(x)$ 可导, 所以 $x = 0$ 为驻点, 即

$y(0) = 3, y'(0) = 0$, 所以 $C_1 = 1, C_2 = 2$, 故 $y(x) = e^{-2x} + 2e^x$

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

【答案】 21

【解析】 A 的所有特征值为 $2, -2, 1$. B 的所有特征值为 $3, 7, 1$.

所以 $|B| = 3 \times 7 \times 1 = 21$.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 由题设知, $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$, 而且 X, Y 相互独立, 从而

$$\begin{aligned} P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X - 1)Y < 0\} = P\{X - 1 > 0, Y < 0\} + P\{X - 1 < 0, Y > 0\} \\ &= P\{X > 1\}P\{Y < 0\} + P\{X < 1\}P\{Y > 0\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = c + kx^3$. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

【答案】 $a = -1, b = \frac{-1}{2}, k = \frac{-1}{3}$

【解析】法一:

因为 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$,

那么,

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+a)x + (b - \frac{a}{2})x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3)}{kx^3},$$

可得:
$$\begin{cases} 1+a=0 \\ b-\frac{a}{2}=0 \\ \frac{a}{3k}=1 \end{cases}, \text{ 所以, } \begin{cases} a=-1 \\ b=-\frac{1}{2} \\ k=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

法二:

解: 由题, 得

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim_{x \rightarrow 0} 3kx^2 = 0$, 得分子 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{a}{1+x} + b \sin x + bx \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+a) = 0$, 求得 c ;

$$\begin{aligned} \text{于是 } 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x} + b \sin x + bx \cos x}{3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b(1+x) \sin x + bx(1+x) \cos x}{3kx^2(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b(1+x) \sin x + bx(1+x) \cos x}{3kx^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + b \sin x + b(1+x) \cos x + b(1+x) \cos x + bx \cos x - bx(1+x) \sin x}{6kx} \end{aligned}$$

由分母 $\lim_{x \rightarrow 0} 6kx = 0$, 得分子

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + b \sin x + 2b(1+x) \cos x + bx \cos x - bx(1+x) \sin x] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2b \cos x) = 0, \text{ 求得}$$

$$b = -\frac{1}{2};$$

进一步, b 值代入原式

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2} \sin x - (1+x) \cos x - \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} x(1+x) \sin x}{6kx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} \cos x - \cos x + (1+x) \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} (1+x) \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} x(1+x) \cos x}{6k} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{6k}, \text{ 求得 } k = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

【答案】 $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}$

【解析】
$$\begin{aligned} \iint_D x(x+y) dx dy &= \iint_D x^2 dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy \\ &= 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} x^5 \Big|_0^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 t \cos^2 t dt - \frac{2}{5} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} \stackrel{u=2t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润的最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型, 设 Q 为该商品的需求量, P 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 ($\eta > 0$).

(I) 证明定价模型为 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$;

(II) 若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$, 需求函数为 $Q = 40 - P$, 试由 (I) 中的定价模型确定此商品的价格.

【答案】(I) 略 (II) $P = 30$.

【解析】(I) 由于利润函数 $L(Q) = R(Q) - C(Q) = PQ - C(Q)$, 两边对 Q 求导, 得

$$\frac{dL}{dQ} = P + Q \frac{dP}{dQ} - C'(Q) = P + Q \frac{dP}{dQ} - MC.$$

当且仅当 $\frac{dL}{dQ} = 0$ 时, 利润 $L(Q)$ 最大, 又由于 $\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP}$, 所以 $\frac{dP}{dQ} = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{P}{Q}$,

故当 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$ 时, 利润最大.

(II) 由于 $MC = C'(Q) = 2Q = 2(40 - P)$, 则 $\eta = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} = \frac{P}{40 - P}$ 代入 (I) 中的定价模型,

得 $P = \frac{2(40 - P)}{1 - \frac{1}{P}}$, 从而解得 $P = 30$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 表达式.

【答案】 $f(x) = \frac{8}{4 - x}$

【解析】曲线的切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 切线与 x 轴的交点为 $\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$

故面积为: $S = \frac{1}{2} \frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4$.

故 $f(x)$ 满足的方程为 $f^2(x) = 8f'(x)$, 此为可分离变量的微分方程,

解得 $f(x) = \frac{-8}{x + C}$, 又由于 $f(0) = 2$, 带入可得 $C = -4$, 从而 $f(x) = \frac{8}{4 - x}$

(19)(本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

【答案】 $f'(x) = [u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)]'$

$$= u_1'(x)u_2(x)\dots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\dots u_n(x) + \dots + u_1(x)u_2(x)\dots u_n'(x)$$

【解析】 (I) $[u(x)v(x)]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} u(x+h) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x)$$

$$= u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

(II) 由题意得

$$f'(x) = [u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)]'$$

$$= u_1'(x)u_2(x)\dots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\dots u_n(x) + \dots + u_1(x)u_2(x)\dots u_n'(x)$$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \text{ 且 } \mathbf{A}^3 = \mathbf{O}.$$

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 \mathbf{X} 满足 $\mathbf{X} - \mathbf{XA}^2 - \mathbf{AX} + \mathbf{AXA}^2 = \mathbf{E}$, 其中 \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵, 求 \mathbf{X} .

$$\text{【答案】 } a = 0, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【解析】

$$(I) \mathbf{A}^3 = \mathbf{O} \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 = 0 \Rightarrow a = 0$$

(II) 由题意知

$$X - XA^2 - AX + AXA^2 = E \Rightarrow X(E - A^2) - AX(E - A^2) = E$$

$$\Rightarrow (E - A)X(E - A^2) = E \Rightarrow X = (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = [(E - A^2)(E - A)]^{-1}$$

$$\Rightarrow X = (E - A^2 - A)^{-1}$$

$$E - A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix} \text{ 相似于矩阵 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 \mathbf{P} , 使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ 为对角矩阵.

$$\text{【答案】 } a = 4, b = 5, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

【解析】(1) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B}) \Rightarrow 3 + a = 1 + b + 1$

$$|A|=|B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = E + C$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3)$$

C 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$

$\lambda = 0$ 时 $(0E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (2, 1, 0)^T; \xi_2 = (-3, 0, 1)^T$

$\lambda = 5$ 时 $(4E - C)x = 0$ 的基础解系为 $\xi_3 = (-1, -1, 1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A = 1 + \lambda_C : 1, 1, 5$

$$\text{令 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$$

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 $E(Y)$.

【答案】(I) $P\{Y = n\} = C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2} p = (n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$;

(II) $E(Y) = 16$.

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率, 则 $p = P(X > 3) = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$,

从而 $P\{Y = n\} = C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2} p = (n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$, $n = 2, 3, \dots$

为 Y 的概率分布;

(II) 将随机变量 Y 分解成 $Y = M + N$ 两个过程, 其中 M 表示从 1 到 n ($n < k$) 次试验观测值大于 3 首次发生, N 表示从 $n+1$ 次到第 k 次试验观测值大于 3 首次发生.
则

$$M \sim Ge(n, p), \quad N \sim Ge(k-n, p)$$

所以

$$E(Y) = E(M + N) = E(M) + E(N) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} = \frac{2}{\frac{1}{8}} = 16.$$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【答案】(I) $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

(II) $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

【解析】(I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_{\theta}^1 x \cdot \frac{1}{1-\theta} dx = \frac{1+\theta}{2}$,

令 $E(X) = \bar{X}$, 即 $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$, 解得 $\hat{\theta} = 2\bar{X} - 1$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为 θ 的矩估计量 ;

(II) 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$,

当 $\theta \leq x_i \leq 1$ 时, $L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\theta} = \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n$, 则 $\ln L(\theta) = -n \ln(1-\theta)$.

从而 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1-\theta}$, 关于 θ 单调增加,

所以 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.