2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三） 试题及解答

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数如图所示，则（ ）

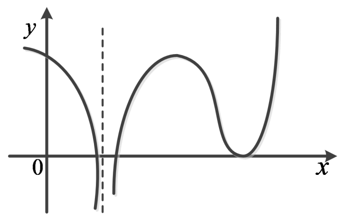
（A）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

（B）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

（C）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

（D）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

【答案】(B)



【解析】【解析】由图像易知选 B

2、已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A） $f'_x-f'_y=0$ （B） $f'_x+f'_y=0$ （C） $f'_x-f'_y=f$ （D） $f'_x+f'_y=f$

【答案】(D)

【解析】 $f'_x=\dfrac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$ $f'_y=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，所以 $f'_x+f'_y=f$

（3）设 $T_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}dxdy(\mathrm{i}=1,2,3)$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\right\},D_3=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\right\}$，则

（A） $T_1 < T_2 < T_3$

（B） $T_3 < T_1 < T_2$

（C） $T_2 < T_3 < T_1$

（D） $T_2 < T_1 < T_3$

【答案】B

【解析】由积分区域的性质易知选 B.

（4）级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$，（K 为常数）

（A）绝对收敛

（B）条件收敛

（C）发散

（D）收敛性与 K 有关

【答案】A

【解析】由题目可得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\sin(n+k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

因为$\left|\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$，由正项级数的比较判别法得，该级数绝对收敛。

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　　）

（A） A^T 与 B^T 相似

（B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

(D) $A+A^{-1}$与$B+B^{-1}$相似

【答案】(C)

【解析】此题是找错误的选项。由A与B相似可知，存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=B$，则

(1) $(P^{-1}AP)^T=B^T \Rightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T \Rightarrow A^T \sim B^T$, 故（A）不选；

(2) $(P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1} \Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$，故（$B$）不选；

(3)$P^{-1}(A+A^{-1})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=B+B^{-1} \Rightarrow A+A^{-1} \sim B+B^{-1}$, 故（$D$）不选；

此外，在（C）中，对于$P^{-1}(A+A^T)P=P^{-1}AP+P^{-1}A^TP$，若$P^{-1}AP=B$，则$P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$，而$P^{-1}A^TP$未必等于$B^T$，故（C）符合题意。综上可知，(C）为正确选项。

(6）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$的正负惯性指数分别为$1,2$，则（　　）

(A) $a>1$

(B) $a<-2$

(C) $-2<a<1$

(D) $a=1$或$a=-2$

【答案】(C)

【解析】考虑特殊值法，当$a=0$时，$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，

其矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，由此计算出特征值为$2,-1,-1$，满足题目已知条件，故$a=0$成立，因此（C）为正确选项。

7、设A,B为随机事件，$0<P(A)<1, 0<P(B)<1,$若$P(A|B)=1$则下面正确的是（　　）

(A) $P(\overline{B}|\overline{A})=1$

(B) $P(A|\overline{B})=0$

(C) $P(A+B)=1$

(D) $P(B|A)=1$

【答案】(A)

【解析】根据条件得 $P(AB)=P(B)$

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A+B})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(A)}=1$$

8、设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim(1,4)$，则 $D(XY)$ 为

(A) 6

(B) 8

(C) 14

(D) 15

【答案】(C)

【解析】因为 X,Y 独立，

则 $D(XY)=E(XY)^2-(EXY)^2=EX^2EY^2-(EXEY)^2$

$$=\left[DX+(EX)^2\right]\left[DY+(EY)^2\right]-(EXEY)^2=14$$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ _____

【答案】6

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3}=2$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$

(10)极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$____ .

【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x dx=\sin 1-\cos 1$

(11)设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 有方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$____ .

【答案】$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

【解析】$(x+1)x-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导得

$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)(1-z_x')$
$(x+1)z_y'-2y=x^2(f_1'(x-z,y)(-z_y')+f_2'(x-z,y))$，将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得，

$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

（12）设 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$__________

【答案】：$\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$

【解析】：$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1}x^2e^{-y^2}dxdy=2\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\end{vmatrix}=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$

14、设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回的取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到为止，则

取球次数恰为 4 的概率为________

【答案】$\frac{2}{9}$

【解析】$P(A)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}\times 2\cdot C_3^1\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

三、解答题：15−23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15 （本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1-\frac{4x^2}{2}+\frac{2^4x^4}{4!}+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-1+o(x^4)}{x^4}}$

$=e^{\frac{1}{3}}$

16、(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\frac{p}{120-p}(\eta>0)$， p 为单价（万元）

(1)求需求函数的表达式

(2)求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义。

【解析】(1) 由弹性的计算公式得

$\eta=\left|\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}\right|$可知 $\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=\frac{-p}{120-p}$

分离变量可知 $\frac{dQ}{Q}=\frac{dp}{p-120}$

两边同时积分可得 $\ln Q=\ln(p-120)+C$

解得 $Q=C(p-120)$

由最大需求量为 1200 可知

$Q(0)=1200$，解得 $C=-10$

故 $Q=-10(p-120)=1200-10p$

（2）收益 $R=Qp=(1200-10P)P$

边际收益：$\frac{dR}{dQ}=\frac{dR}{dp}\frac{dp}{dQ}=(1200-20p)(-10)=200p-12000$

已知 $\left.\frac{dR}{dQ}\right|_{p=100}=8000$

经济学意义是需求量每提高 1 件，收益增加 8000 万元.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt\ \ (x>0)$, 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的最小值。

【解析】当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=\int_0^{|x|}\left(x^2-t^2\right)dt+\int_{|x|}^1\left(t^2-x^2\right)dt=\frac{4}{3}|x|^3-x^2+\frac{1}{3}$

当 $|x|\ge 1$ 时，$f(x)=\int_0^1\left(x^2-t^2\right)dt=x^2-\frac{1}{3}$

则 $f(x)=\begin{cases} x^2-\frac{1}{3} & x\le -1 \\ -\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3} & -1<x<0 \\ \frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3} & 0\le x<1 \\ x^2-\frac{1}{3} & x\ge 1 \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-1 \\ -4x^2-2x & -1<x<0 \\ 4x^2-2x & 0<x<1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$$

由导数的定义可知，$f'(-1)=-2, f'(0)=0, f'(1)=2$

故 $f'(x)=\begin{cases}2x & x\le -1\\ -4x^2-2x & -1<x<0\\ 4x^2-2x & 0\le x<1\\ 2x & x\ge 1\end{cases}$

由于 $f(x)$ 是偶函数，所以只需求它在 $[0,+\infty)$ 上的最小值。

易知 $f'(x)<0,\ x\in(0,1);\ f'(x)>0,\ x\in(1,+\infty);$

可知 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=\dfrac{2}{3}$。

（18）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$，求 $f(x)$

【解析】令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$

代入方程可得

$$\int_0^x f(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt+e^{-x}-1$$

两边同时求导可得

$$f(x)=\int_0^x f(t)dt-e^{-x} \qquad (1)$$

由于 $f(x)$ 连续，可知 $\int_0^x f(t)dt$ 可导，从而 $f(x)$ 也可导。

故对上式两边再求导可得

$$f'(x)=f(x)+e^{-x}$$

在(1)式两边令 $x=0$ 可得

$$f(0)=-1$$

解此微分方程可得

$$f(x)=-\frac{3}{2}e^{x}+\frac{e^{-x}}{2}$$

（19）（本题满分 10 分）求 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域和和函数。

【解析】令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$

两边同时求导得

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

两边同时求导得

$$S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$$

两边积分可得

$$S'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

由 $S'(0)=0$ 可知，$S'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

两边再积分可知

$$S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$$

易知，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛半径为 1，

且当 $x=1,x=-1$ 时级数收敛，可知幂级数的收敛域为[-1,1]

因此，$S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$，$x\in$[-1,1]

（20）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

（Ⅰ）求 a 的值;

（Ⅱ）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解

【解析】

（Ⅰ）由方程组 $Ax=\beta$ 无解，可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$，故这里有 $|A|=0$，$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$

或 $a=2$。由于当 $a=0$ 时，$r(A)\neq r(A,\beta)$，而当 $a=2$ 时，$r(A)=r(A,\beta)$。综上，故 $a=0$ 符合题目。

（Ⅱ）当 $a=0$ 时，$A^TA=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix},A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$，故

$$(A^TA,A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 2 & -2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

因此，方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$,其中 k 为任意实数。

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

【解析】

（Ⅰ）利用相似对角化。

由 $|\lambda E-A|=0$，可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，故 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量为 $\gamma_1=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $\gamma_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

设 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$ 可得 $A=P\Lambda P^{-1}$， $A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}$，

对于 $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，利用初等变换，可求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（Ⅱ） $B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$，由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，故 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$，因此，

$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2,\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$.

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1,X\le Y\\0,X>Y\end{cases}$$

(I) 写出 (X,Y) 的概率密度；

(II) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

【答案】

（I）$f(x,y)=\begin{cases}3,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\\0,其他\end{cases}$

（II）U 与 X 不独立，因为 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$；

（III）Z 的分布函数

$$F_zZ=\begin{cases}0,z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3,0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2,1\le z<2\\ 1,z\ge 2\end{cases}$$

【解析】(1) 区域 D 的面积 $s(D)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)=\frac{1}{3}$，因为 $f(x,y)$ 服从区域 D 上的均匀分布，所以

$f(x,y)=\begin{cases}3 & x^2<y<\sqrt{x}\\0 & 其他\end{cases}$.

（2）X 与 U 不独立.

因为 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{12}$

$P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$

所以 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$,故 X 与 U 不独立。

（3）$F(z)=P\{U+X\le z\}=P\{U+X\le z|U=0\}P\{U=0\}+P\{U+X\le z|U=1\}P\{U=1\}$

$=\frac{P\{U+X\le z,U=0\}}{P\{U=0\}}P\{U=0\}+\frac{P\{U+X\le z,U=1\}}{P\{U=1\}}P\{U=1\}$

$=P\{X\le z,X>Y\}+P\{1+X\le z,X\le Y\}$

又$P\{X\le z,X>Y\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, & z\ge 1\end{cases}$，$P\{X+1\le z,X\le Y\}=\begin{cases}0, & z<1\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ \frac{1}{2}, & z\ge 2\end{cases}$

所以$F(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$.

（23）设总体X的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,X_3$为来自总体$X$的简单随机样本，令$T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

（1）求T的概率密度

（2）当a为何值时，aT的数学期望为θ

【解析】(1）根据题意，X_1,X_2,X_3独立同分布，T的分布函数为

$$F_T(t)=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}$$

$$=P\{X_1\le t\}P\{X_2\le t\}P\{X_3\le t\}=\left(P\{X_1\le t\}\right)^3$$

当$t<0$时，$F_T(t)=0$；

当$0<t<\theta$时，$F_T(t)=\left(\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}d\theta\right)^3=\frac{t^9}{\theta^9}$；

当$t\ge 0$时，$F_T(t)=1$，

所以$f_T(t)=\begin{cases}\frac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta\\ 0, & others\end{cases}$。

（2）$E(aT)=aET=a\int_0^\theta t\frac{9t^8}{\theta^9}dt=\frac{9}{10}a\theta$，

根据题意， $E(aT)=\frac{9}{10}a\theta=\theta$ ，即 $a=\frac{10}{9}$