2018 年考研数学三真题及答案解析

一、选择题（4分）

1.下列函数中在$x=0$处不可导的是（ ）

A、$f(x)=|x|\sin|x|$
B、$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$
C、$f(x)=\cos|x|$
D、$f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】D

2.设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)dx=0$，则（ ）

A、当$f'(x)<0$时，$f(\frac{1}{2})<0$
B、当$f''(x)<0$时，$f(\frac{1}{2})<0$
C、当$f'(x)>0$时，$f(\frac{1}{2})<0$
D、当$f''(x)>0$时，$f(\frac{1}{2})<0$

【答案】D

3.设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\sqrt{\cos x}dx$，则（ ）

A、$M>N>K$
B、$M>K>N$
C、$K>M>N$
D、$K>N>M$

【答案】C

4.设某产品的成本函数$C(Q)$可导，其中Q为产量，若产量为Q_0时平均成本最小，则（ ）

A、$C'(Q_0)=0$
B、$C'(Q_0)=C(Q_0)$
C、$C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$
D、$Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$

【答案】D

5.下列矩阵中，与矩阵$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$相似的为（ ）

A、$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

B、$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

C、$\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

D、$\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

【答案】A

6.设A,B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，(X,Y)表示分块矩阵，则（ ）

A、$r(A,AB)=r(A)$

B、$r(A,BA)=r(A)$

C、$r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$

D、$r(A,B)=r(A^T,B^T)$

【答案】A

7.设随机变量X的概率密度$f(x)$满足$f(1+x)=f(1-x)$，且$\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则$P\{X<0\}=$（ ）

A、0.2

B、0.3

C、0.4

D、0.5

【答案】A

8.设$X_1,X_2,\ldots,X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$的简单随机样本。令

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$，$S^*=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}$，则（ ）

A、$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n)$

B、$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$

C、$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n)$

D、$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S^*}\sim t(n-1)$

【答案】B

二、填空题（4分）

9.曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程为________

【答案】$y=4x-3$

10.$\int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}dx=$________

【答案】$e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$

11.差分方程$\Delta^2 y_x-y_x=5$的通解是________

【答案】$y_x=c\cdot 2^{x+1}-5.$

12.函数$\varphi(x)$满足$\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=2x\varphi(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$且$\varphi(0)=2$，则$\varphi(1)=$________

【答案】$\varphi(1)=2e.$

13.设A为3阶矩阵，a_1,a_2,a_3为线性无关的向量组，若$Aa_1=a_1+a_2$，$Aa_2=a_2+a_3$，$Aa_3=a_1+a_3$，则$|A|=$________

【答案】2

14.随机事件A,B,C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，则$P(AC|A\cup B)=$________

【答案】$\frac{1}{3}$

三、解答题（10分）

15.已知实数a,b，满足$\lim_{x\to 0}\left[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求$a,b$

【答案】令$t=\frac{1}{x}$可得$\lim_{t\to 0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}=2$

其中$\lim_{t\to 0^+}\frac{(a+bt)e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{ae^t-1}{t}+\lim_{t\to 0^+}be^t=\lim_{t\to 0^+}\frac{ae^t-1}{t}+b$

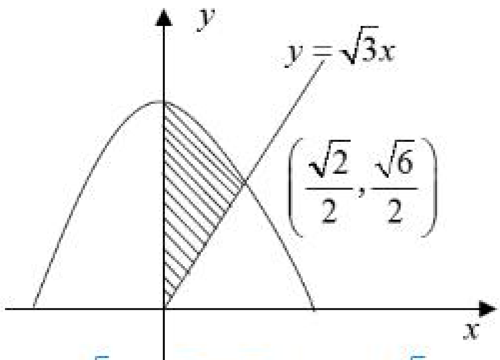
可知$\lim_{t\to 0^+}\frac{ae^t-1}{t}=2-b$，而要使得$\lim_{t\to 0^+}\frac{ae^t-1}{t}$存在，必须有$a=1$。

此时，有$\lim_{t\to 0^+}\frac{ae^t-1}{t}=1=2-b$，故$b=1$。

综上，$a=1,b=1$

16.设平面区域D由曲线$y=\sqrt{3(1-x^2)}$与直线$y=\sqrt{3}x$及y轴围成.计算二重积分$\iint\limits_D x^2dy$.

【答案】积分区域如图，



$I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2dy=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2(\sqrt{3(1-x^2)}-\sqrt{3}x)dx$

$=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3(1-x^2)}dx-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3dx$，

其中对于$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{3(1-x^2)}dx$，令$x=\sin t$，可化为

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{3}\sin^2t\cos^2tdt=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^22td(2t)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{32}\pi$，

而$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{16}$，综上$I=\frac{\sqrt{3}}{32}\pi-\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{32}(\pi-2)$

17.将长为2m的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

【答案】设分成的三段分别为x,y,z，则有$x+y+z=2$及$x,y,z>0$，圆的面积为$S_1=\frac{1}{4\pi}x^2$，正方形的面积为$S_2=\frac{1}{16}y^2$，正三角形的面积为$S_3=\frac{\sqrt{3}}{36}z^2$，总面积$S=\frac{1}{4\pi}x^2+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2$，则问题转化为在条件$x+y+z=2,x,y,z>0$下，求函数$\frac{1}{4\pi}x^2+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2$的最小值。令

$L=\frac{1}{4\pi}x^2+\frac{1}{16}y^2+\frac{\sqrt{3}}{36}z^2+\lambda(x+y+z-2)$，

则有$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{y}{8}+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\sqrt{3}}{18}z+\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+y+z-2=0\end{cases}$，解得唯一条件极值点为$\begin{cases}x=\frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{3}\pi+4\sqrt{3}+9}\\ y=\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi+4\sqrt{3}+9}\\ z=\frac{18}{\sqrt{3}\pi+4\sqrt{3}+9}\end{cases}$，在该点的函数值即为最小值，最小值为$\frac{3\pi+12+9\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi+4\sqrt{3}+9^2}$

18.已知$\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(-1<x<1)$，求$a_n$

【答案】

将$\cos 2x$与$-\frac{1}{(1+x)^2}$展成幂级数可得

$\cos 2x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}x^{2n},-\infty<x<+\infty$，

$-\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n,-1<x<1$，

则

$a_{2n+1}=(-1)^{2n+2}(2n+2)=2n+2,n=0,1,2,\cdots$；

$a_{2n}=\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{2n+1}(2n+1)=\frac{(-1)^n2^{2n}}{(2n)!}-(2n+1),n=0,1,2,\cdots$

19.设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$。证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim_{n\to\infty}x_n$

【答案】由题意可知$x_{n+1}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}$，

首先证明$\{x_n\}$的有界性：

证明$x_n>0$：当$n=1$时，$x_1>0$，设$n=k$时，$x_k>0$，则$x_{k+1}=\ln\frac{e^{x_k}-1}{x_k}$，其中$e^{x_k}-1>x_k$，可知$x_{k+1}>\ln 1=0$，因此对于任意的$n$，有$x_n>0$。

再证明$\{x_n\}$的单调性：

又因为$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-e^{x_n}=\frac{e^{x_n}-1-x_ne^{x_n}}{x_n}$

令$f(x)=e^x-1-xe^x$，则$f'(x)=-xe^x$，$f'(x)=-xe^x<0(x>0)$，故当$x>0$时，$f(x)<f(0)=0$，从而$e^{x_{n+1}}-e^{x_n}<0$，$x_{n+1}-x_n<0$，可知$\{x_n\}$单调递减。

综上，$\{x_n\}$为单调递减有下界的数列，可知$\{x_n\}$收敛。

设$\lim_{n\to\infty}x_n=a$，在$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$两边同时令$n\to\infty$，得$ae^a=e^a-1$，解得$a=0$，故$\lim_{n\to\infty}x_n=0$

20.设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中$a$是参数.

(1)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；(2)求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

【答案】

(1)由$f(x_1,x_2,x_3)=0$可知$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+ax_3=0 \end{cases}$，

该齐次线性方程组的系数矩阵为$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$，将其经初等行变换化为阶梯形矩阵，即$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$，

当$a \neq 2$时，$f(x_1,x_2,x_3)=0$有唯一解$(0,0,0)^T$。

当$a=2$时，$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，其通解为$k(-2,-1,1)^T$，$k \in R$。

(2)当$a \neq 2$时，直接作非退化的线性变换$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_1+ax_3 \end{cases}$，可将原二次型化为规范形$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$。

当$a=2$时，作非退化的线性变换$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，可将原二次型化为规范形

$$f=y_1^2+y_2^2+(y_1+y_2)^2=2y_1^2+2y_2^2+2y_1y_2$$

该二次型正惯性指数为2，负惯性指数为0，故其合同规范形为$z_1^2+z_2^2$

21.已知a是常数，且矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$可经初等变换化为矩阵

$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

(1)求a；(2)求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

【答案】

(1)由题意可知：矩阵A与B是等价的，故$r(A)=r(B)$。

对矩阵A和B分别进行初等行变换，即

$$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}。$$

显然，$r(A)=2$，故$a=2$。

(2)令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，由$AP=B$可知：$A\xi_i=\beta_i,i=1,2,3$，即$\xi_i$为$Ax=\beta_i$的解。

因为$(A|B)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&3&-6&-3&-3&-3\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

，所以导出组的基础解系为$(-6,2,1)^T$，三个非齐次线性方程组的特解分别为$(3,-1,0)^T$，$(4,-1,0)^T$，$(4,-1,0)^T$，三个线性方程组的通解分别为

$\xi_1=(3,-1,0)^T+k_1(-6,2,1)^T$，$\xi_2=(4,-1,0)^T+k_2(-6,2,1)^T$，

$\xi_3=(4,-1,0)^T+k_3(-6,2,1)^T$，

则

则

$$P=\begin{bmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}。$$

对P做初等行变换可得

$$P\to\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & k_2-k_1 & k_3-k_1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k_3-k_2 \end{bmatrix},$$

由于P可逆，故$k_3\neq k_2$

22.设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布。令$Z=XY$。

(1)求$\mathrm{cov}(X,Z)$；(2)求Z的概率分布。

【答案】

(1)由X与Y相互独立，可得$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$。

由协方差的计算公式，可得

$Cov(X,Z)=E(XZ)-E(X)\cdot E(Z)=E(X^2Y)-E(X)\cdot E(XY)=E(X^2)E(Y)$

，其中$E(X)=1\times0.5+(-1)\times0.5=0$，

$E(X^2)=1^2\times0.5+(-1)^2\times0.5=1$，$E(Y)=\lambda$，

所以$Cov(X,Z)=\lambda$。

(2)Y的分布列为$P\{Y=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k=0,1,2,\cdots)$。故$Z=XY$为离散型随机变量

由概率的有限可加性可得

$P\{Z=k\}=P\{XY=k\}=P\{XY=k,X=-1\}+P\{XY=k,X=1\}$

$=P\{Y=-k,X=-1\}+P\{Y=k,X=1\}=0.5(P\{Y=k\}+P\{Y=-k\})$

，

当$k=1,2,\cdots$时，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$；

当$k=0$时，$P\{Z=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$；

当$k=-1,-2,\cdots$时，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-k}}{(-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda}$；

23.设总体X的概率密度为$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}},-\infty<x<+\infty$，其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本。记$\sigma$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$。

(1)求$\hat{\sigma}$；(2)求$E\hat{\sigma}$和$D\hat{\sigma}$。

【答案】

(1)设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观测值，则似然函数

$L(\sigma;x_1,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=\frac{1}{2^n\sigma^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$，

取对数可得：$\ln L=-n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，则$\frac{d\ln L}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$。

令$\frac{d\ln L}{d\sigma}=0$，解得σ的最大似然估计值为$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，则$\sigma$的最大似然估计量为

$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$。

(2)由期望的计算公式可得

$E(\hat{\sigma})=E\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=E(|X|)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\sigma$。

$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\frac{1}{n}D(|X|)$，

而

$E(|X|^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}dx=\sigma^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}d\left(\frac{x}{\sigma}\right)=2\sigma^2$，

$D(|X|)=E(|X|^2)-[E(|X|)]^2=2\sigma^2-\sigma^2=\sigma^2$，

故$D(\hat{\sigma})=\frac{\sigma^2}{n}$。