2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$

（A）1.　　　　（B）2.

（C）3.　　　　（D）4.

【答案】C

【解析】$x - \tan x = x - (x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) \sim -\frac{1}{3}x^3$, 故 $k = 3.$

（2）已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根，则 k 的取值范围（　　）

（A）$(-\infty, -4)$　（B）$(4, +\infty)$　（C）$[-4, 4]$　（D）$(-4, 4)$

【答案】D

【解析】

令 $f(x) = x^5 - 5x + k$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2+1)(x^2-1)$

则 $x < -1, f'(x) > 0; -1 < x < 1, f'(x) < 0; x > 1, f'(x) > 0;$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$

结合单调性知 $f(-1) > 0, f(1) < 0$ 时才有三个根，即

$f(-1) = -1 + 5 + k > 0, f(1) = 1 - 5 + k < 0,$ 则 $-4 < k < 4$

（3）已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为（　　）

（A）1,0,1　（B）1,0,2　（C）2,1,3　（D）2,1,4

【答案】D

【解析】

由题干分析出 -1 为特征方程 $r^2 + ar + b = 0$ 的二重根, 即 $(r+1)^2 = 0$

故 $a = 2, b = 1;$

又 e^x 为 $y'' + 2y' + y = ce^x$ 的解, 代入方程得 $c = 4.$

（4）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则（　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散

【答案】B
【解析】

A、C:反例$u_n=\frac{1}{n^3}, v_n=(-1)^n$;

D:反例$u_n=\frac{1}{n^3}, v_n=(-1)^n\frac{1}{\ln n}$;

（5）设 A 是四阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是（　）

A.0　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.3

【答案】（A）

【解析】由于 $AX=0$ 的基础解系有只有两个解向量，则由$4-R(A)=2$可得$R(A)=2<3$，故$R(A^*)=0$.

（6）设 A 是3阶实对称矩阵，E 是3阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且$|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形为

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　　　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　　　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解析】$\because A^2+A=2E$，设 A 的特征值为 λ

$\therefore \lambda^2+\lambda=2$

$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$

$\therefore \lambda=-2$或1

$\because |A|=4$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2, \lambda_3=1 \therefore q=2, p=1$

$\therefore X^T Ax$ 的规范形为 ${y_1}^2 - {y_2}^2 - {y_3}^2$

（7）设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

【答案】C

【解析】A选项$\Leftrightarrow P(AB)=0$，故 A 排除

B选项$\Leftrightarrow A$、B 独立，故 B 排除

C选项$\Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$

而$P(A)=P(B)$，故 C 正确

D选项$\Leftrightarrow P(AB)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

$\Leftrightarrow 1=P(A)+P(B)$ 故 D 排除

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.则 $P\{|X-Y|<1\}$

A.与 μ 无关，而与 σ^2 有关.　　B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

C. 与 μ,σ^2 都有关.　　D. 与 μ,σ^2 都无关.

【答案】A

【解析】X,Y 独立，服从正态分布，则 $z=x-y\sim N(\sigma,2\sigma^2)$

$$P(|X-Y|<1)=P(-1<Z<1)=P(-\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}<\frac{Z}{\sqrt{2}\sigma}<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})$$

$$=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$$，故 A 正确

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}\right]=$ ________

【答案】e^{-1}

【解析】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{n}=e^{-1}$

(10) 曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为 ________

【答案】

【解析】$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$

$y''=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$

令 $y''=0$得$x=0$或$x=\pi$

当 $x>\pi$时$y''>0$;当$x<\pi$时，$y''<0$，故$(\pi,-2)$为拐点

(11) 已知 $f\left(x\right)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}dt$，则 $\int_0^1 x^2 f\left(x\right)dx=$ ________

【答案】

【解析】$\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx=0-\int_0^1\frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}dx$

$=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1+x^4}d(1+x^4)=-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=-\frac{2\sqrt{2}-1}{18}=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$

(12) A、B 两商品的价格分别为 P_A,P_B，需求函数

$Q_A=500-P_A{}^2-P_AP_B+2P_B{}^2,P_A=10,P_B=20$，求 A 商品对自身价格的需求弹性

$\eta_{AA}=\left(\eta>0\right)$________

【答案】

【解析】$P_B=20$时，$Q_A=500-P_A{}^2-20P_A+800$

$\eta=\left|\frac{dQ_A}{dP_A}\cdot\frac{P_A}{Q_A}\right|=\left|(-2P_A-20)\cdot\frac{P_A}{1300-P_A{}^2-20P_A}\right|$

当 $P_A=10$时，$\eta=\frac{2}{5}$.

（13）$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & a^2-1\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix},AX=b$ 有无穷多解，求 $a=$______

【答案】$a=1$

【解析】$AX=b$ 有无穷多解，则 $R\left(A,b\right)=R(A)\le 2$，故 $\left|A\right|=a^2-1=0,$即$a=\pm 1$，

当 $a=1$ 时，$R\left(A,b\right)=R(A)=2.$ 当 $a=-1$ 时，$R\left(A,b\right)>R(A).$ 综上，故 $a=1$.

（14）变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2,\\ 0,其他,\end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\left\{F(X)>EX-1\right\}=$______

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ,0<x<2\\ 0 & ,其他\end{cases}$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6}x^3\,|_0^2=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x\dfrac{t}{2}dt & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

$$P(F(x)>E(x)-1)=P(F(x)>\frac{1}{3})$$

$$=P(\frac{x^2}{4}>\frac{1}{3})=P(x>\frac{2}{\sqrt{3}})=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}dx=\frac{2}{3}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\le 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值

【答案】

【解析】当 $x>0$ 时. $f'(x)=(e^{2x\ln x})'=e^{2x\ln x}(2lnx+2)=x^{2x}(2lnx+2)$

当 $x<0$ 时. $f'(x)=(xe^{x})'=e^{x}+xe^{x}$.

$$f_{-}'(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{xe^{x}+1-1}{x}=1$$

$$f_{+}'(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$$

故 $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}(2lnx+2),x>0\\ e^{x}(1+x),x<0\end{cases}$

在 $x=0$ 附近

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0.f(x)$单调递减.

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0.f(x)$单调递增.

故 $f(x)$在$x=0$取极大值. $f(0)=1$.

（16）（本题满分 10 分）已知 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【答案】

【解析】$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'-f_2'$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{11}''-f_{12}''-f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{11}''-f_{12}''(-1)-f_{21}''-f_{22}''(-1)=1-f_{11}''+f_{22}''$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'+f_2'$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''+f_{22}''(-1)=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}''+1-f_{11}''+f_{22}''-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''$$
$$=1-3f_{11}''-f_{22}''$$

（17）（本题满分 10 分）已知 $y(x)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且有 $y(e)=\sqrt{e}$.

（1）求 $y(x)$；

（2）$D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求平面区域 D 绕 x 轴旋转成的旋转体体积

【答案】（1） $y=\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$；（2） $V=\frac{\pi}{2}(e^4-4)$；

【解析】（1） $y=e^{-\int(-x)dx}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{\int(-x)dx}dx+C\right)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx+C\right)=e^{\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{x}+C\right)$

由$y(e)=\sqrt{e}$可得$C=0$，故$y=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

（2） $V=\int_1^2\pi y^2dx=\int_1^2\pi xe^{x^2}dx=V=\frac{\pi}{2}(e^4-4).$

（18）（本题满分 10 分）求曲线 $y=e-x\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积

【答案】

【解析】所求面积 $A=\int_0^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx$ 。

$$\int_0^{+\infty}\left|e^{-x}\sin x\right|dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin xdx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k\left[-\frac{1}{2}e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)\right]\Bigg|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\left[e^{-(k+1)\pi}\left(-1\right)^{k+1}-e^{-k\pi}\left(-1\right)^k\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2}{e^{\pi}-1}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$$

（19）（本题满分 10 分）设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\ \ (n=0,1,2,...)$

（1）证明：$\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ \ (n=2,3...)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

【答案】

【解析】$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$

（1）令 $x=\sin t$，则

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n t\cos^2 tdt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n t\left(1-\sin^2 t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n+2}tdt$$

$$=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{\pi}{2}-\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{\pi}{2}\left(n为偶\right)\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}-\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\left(n为奇\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{\pi}{2}\left(n为偶\right)\\ \frac{1}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\left(n为奇\right)\end{cases}$$

n 为奇数，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{1}{n+3}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdots\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{n+2}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{2}{3}}=\dfrac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}<1$；

n 为偶数，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{1}{n+3}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdots\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{n+2}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{2}{3}}=\dfrac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)}\cdot\dfrac{2}{\pi}<1$；

故$\{a_n\}$单调减少。

n 为偶数时，$\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\dfrac{\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{n-1}{n+2}$；

n 为奇数时，$\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\dfrac{\dfrac{1}{n+2}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}}=\dfrac{n-1}{n+2}$；

故$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3,\cdots\right)$

（2）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)}\cdot\dfrac{\pi}{2}\left(n\text{为奇}\right)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+3)(n+1)}\cdot\dfrac{2}{\pi}\left(n\text{为偶}\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\left(n\text{为奇}\right)\\ \dfrac{2}{\pi}\left(n\text{为偶}\right)\end{cases}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\pi}{2}\left(n\text{为偶}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{\pi}\left(n\text{为奇}\right)$$

（20）（本题满分 11 分）已知向量组

$(\mathrm{I})\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix},(\mathrm{II})\beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$,若向量组(I)和向量组(II)等价，求$\alpha$的取值，并将$\beta_3$用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示

【答案】

【解析】$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&2\\4&4&a^2+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&a^2-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&3\\a+3&1-a&a^2+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&1-a&a^2-a\end{bmatrix}$,所以 $a=1$.

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&0&2&3\\4&4&4&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$, 所以 $\beta_3=k\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix},k\in R.$

所以 $\beta_3=(-k-1)\alpha_1+k\alpha_2+2\alpha_3,k\in R.$

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似，

（1）求 x,y；

（2）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$；

【答案】（1） $x=3,y=-2$；（2） $P=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$

【解析】（1） $A\sim B\Rightarrow\begin{cases}trA=trB\\|A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+y=4\\x-y=5\end{cases}$, 即 $x=3,y=-2$

（2） $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=0\Rightarrow A,B$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=2$ 时，由 $(2E-A)x=0,(2E-B)x=0$ 可得 A、B 属于特征值 $\lambda_1=2$
的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_1=(-1,2,0)^T,\beta_1=(1,0,0)^T$；
当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0,(-E-B)x=0$ 可得 A、B 属于特征值 $\lambda_2=-1$
的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_2=(-2,1,0)^T,\beta_2=(-1,3,0)^T$；
当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0,(-2E-B)x=0$ 可得 A、B 属于特征值 $\lambda_3=-2$
的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_3=(-1,2,0)^T,\beta_3=(0,0,1)^T$；

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 则

$$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$$

故令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, 即 $P^{-1}AP=B$.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\}=p,P\{Y=1\}=1-p$.令 $Z=XY$

（1）求 Z 的概率密度；

（2） p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3） X 与 Z 是否相互独立；

【解析】（1）

$F_Z(z)=P(XY\le z)=P(XY\le z,Y=-1)+P(XY\le z,Y=1)$

$=P(-X\le z)P(Y=-1)+P(X\le z)P(Y=1)$

$=pP(X\ge -z)+(1-p)P(X\le z)$

$=p(1-F_X(-z))+(1-p)F_X(z)$

因为 $f_X(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_X(\text{-}z)=\begin{cases}e^{z}, & z<0\\ 0, & 其他\end{cases}$,

所以 $f_Z(z)=pf_X(-z)+(1-p)f_X(z)$ $f_z(z)=\begin{cases}(1-p)e^{-z}, & z>0\\ pe^{z}, & z<0\\ 0, & 其他\end{cases}$

（2） $\operatorname{cov}(X,Z)=0,\operatorname{cov}(X,XY)=0,$

由于 $\operatorname{cov}(X,XY)=E(X^2Y)-EXEXY=EX^2EY-(EX)^2EY=EYDX,$

则 $\operatorname{cov}(X,XY)=1-2p.$ 由 $1-2p=0,$ 可知当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关.

（3） X 与 Z 不独立.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & ,x\ge\mu\\ 0 & ,x<\mu\end{cases}$$

其中μ是已知参数，$\sigma>0$是未知参数，A是常数，$X_1,X_2,...,X_n$是来自总体X的简单随机样本，

（1）求A；

（2）求σ^2的最大似然估计量；

【解析】(1)根据概率密度归一性，有

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

设$\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$，则$\int_{\mu}^{+\infty}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{0}^{+\infty}Ae^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}A=1$，则$A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

(2) 似然函数$L(\sigma)=\dfrac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，取对数$\ln(L(\sigma))=n\ln A-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

对σ^2求导有，$\dfrac{d(\ln(L(\sigma)))}{d(\sigma^2)}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2(\sigma^2)^2}=0$则$\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，则$\sigma^2$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$。