2020 考研数学二真题

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $x \to 0^+$，无穷小最高阶

A. $\int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)\mathrm{d}t$

B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \mathrm{d}t$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,\mathrm{d}t$

2. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$

A.1
B.2
C.3
D.4

3. $\int_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=$

A. $\dfrac{\pi^2}{4}$

B. $\dfrac{\pi^2}{8}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$

D. $\dfrac{\pi}{8}$

4. $f(x)=x^2\ln(1-x), n\geq 3$ 时，$f^{(n)}(0)=$

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$

B. $\dfrac{n!}{n-2}$

C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$

D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$

5.关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy & xy\neq 0 \\ x & y=0 \\ y & x=0 \end{cases}$ 给出以下结论

①$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$

②$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$

③$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

④$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$ 正确的个数是

A.4

B.3

C.2

D.1

6.设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ [上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则（　　）

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$

B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$

C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$

D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

7.设四阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组. A^* 为 A 的伴随矩阵.则方程组 $A^*x=\mathbf{0}$ 的通解为（　　）.

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_1,k_2k_3 为任意常数

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2k_3 为任意常数

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中，$k_1,k_2k_3$，后为任意常数.

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2k_3 为任意常数

8.设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 属于 1 的线性无关的特征向量，α_3 为 A 的属于特征值-1 的特征向量，则满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的可逆矩阵 P 可为（　　）.

A. $(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$

B. $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

C. $(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,-\alpha_3)$

D. $(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,-\alpha_3)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

9.设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$ ______.

10. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$ _____.

11.设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $dz|_{(0,\pi)}=$ ______.

12.斜边长为 2a 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为 g，水密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为______

13.设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0,y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x=$ _____

14.行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$ _______

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1, g(x)=\int_0^1 f(xt)dt,$ 求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

17.（本题满分 10 分）

$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 极值

18.（截图空出来，后补）

19.（本题满分 10 分）

平面 D 由直线 $x=1, x=2, y=x$ 与 x 轴围成，计算 $\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy.$

20.（本题满分 11 分）

$f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt.$

（1）证：存在 $\xi\in(1,2), f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（2）证：存在 $\eta\in(1,2), f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

21.（本题满分 11 分）

$f(x)$ 可导，$f'(x)>0(x\geq 0)$ 过原点 O

上任意 M 切线与 X 轴交于 T，$MP\perp x$ 轴，$y=f(x)MP, x$ 轴围成面积与 ΔMTP 面积比为 3：2，求曲线方程.

22.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 得 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（1）求 a 的值；

（2）求可逆矩阵 P.

23.（本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中 α 是非零向量且是不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵.

(2)若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.