2020考研数学一真题及答案解析

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $x \to 0^+$ 时，下列无穷小阶数最高的是

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt$

B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

1.答案：D

解析：A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot x^5$

2.设函数 $f(x)$ 在区间（-1，1）内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,$ 则（　　）

A.当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0, f(x)在x=0$ 处可导.

B.当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0, f(x)在x=0$ 处可导.

C.当 $f(x)在x=0处可导时,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0.$

D.当 $f(x)在x=0处可导时,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0.$

2.答案：B

解析:$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0 \therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|}=0 \therefore \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0, \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0, \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0=f'(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导$\therefore$ 选 B

3.设函数 $f(x,y)$ 在点（0，0）处可微，$f(0,0)=0, \boldsymbol{n}=\left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)\right|_{(0,0)}$ 且非零向量 $\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，则（　　）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{d}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|\boldsymbol{d}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

3.答案：A

解析：

$\because f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微. $f(0,0)=0$

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\cdot x-f_y'(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f_x'(0,0)\cdot x-f_y'(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$\because n\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y-f(x,y)$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\left|n\cdot\left(x,y,f(x,y)\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 存在

$\therefore$ 选 A.

4.设 R 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 的收敛半径，r 是实数，则（　　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散时，$|r| \geq R$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散时，$|r| \leq R$

C. $|r| \geq R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散

D. $|r| \leq R$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散

4.答案：A

解析：

$\because R$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内必收敛.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ 发散时，$|r| \geq R$.

∴选 A.

5.若矩阵 A 经初等列变换化成 B，则（　　）

A.存在矩阵 P，使得 $PA=B$

B.存在矩阵 P，使得 $BP=A$

C.存在矩阵 P，使得 $PB=A$

D.方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

5.答案：B

解析：

∵A 经初等列变换化成 B.

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P_1 使得 $AP_1 = B$

$\therefore A = BP_1^{-1}$ 令 $P = P_1^{-1}$

$\therefore A = BP. \therefore$ 选 B.

6.已知直线$L_1:\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{2-c_2}{c_1}$与直线$L_2:\dfrac{x-a_3}{a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_2}=\dfrac{2-c_3}{c_2}$相交于一点，法

向量$a_i=\begin{bmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{bmatrix},i=1,2,3.$则

A. a_1可由a_2,a_3线性表示

B. a_2可由a_1,a_3线性表示

C. a_3可由a_1,a_2线性表示

D. a_1,a_2,a_3线性无关

6.答案：C

解析：

令L_1的方程$\dfrac{x-a_2}{a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_1}=t$

即有$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}=\alpha_2+t\alpha_1$

由L_2的方程得$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}=\alpha_3+t\alpha_2$

由直线L_1与L_2相交得存在t使$\alpha_2+t\alpha_1=\alpha_3+t\alpha_2$

即$\alpha_3=t\alpha_1+(1-t)\alpha_2$，$\alpha_3$可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表示，故应选 C.

7. 设A,B,C为三个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0$

$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则$A,B,C$中恰有一个事件发生的概率为

A. $\dfrac{3}{4}$

B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$

D.$\frac{5}{12}$

7.答案：D

解析：$P(A\overline{B}\overline{C})=P(A\overline{BUC})=P(A)-P[A(BUC)]$

$=P(A)-P(AB+AC)$
$=P(A)+P(AB)-P(AC)+P(ABC)$
$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$

$P(B\overline{A}\overline{C})=P(B\overline{AUC})=P(B)-P[B(AUC)]$
$=P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)$
$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{6}$

$P(C\overline{B}\overline{A})=P(C\overline{BUA})=P(C)-P[CU(BUA)]$
$=P(C)-P(CB)-P(CA)+P(ABC)$
$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{1}{12}$

$P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$
$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

选择 D

8.设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2},\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le 55\right)$ 的近似值为

A.$1-\Phi(1)$

B.$\Phi(1)$

C.$1-\Phi(2)$

D.$\Phi(2)$

8.答案：B

解析：由题意　$EX=\frac{1}{2},DX=\frac{1}{4}$

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right)X = 100EX = 50. \quad D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = 100DX = 25$$

由中心极限定理 $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim N(50,25)$

$$\therefore P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \le 55\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 55}{5} \le \frac{55-50}{5}\right\} = \Phi(1)$$

故选择 B

二、填空题：9—14 小题，每小题 2 分，共 24 分。请将解答写在答题纸指定位置上.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right] =$

9. 解析：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-1} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x-1)\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \mathrm{e}^x + 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - \mathrm{e}^x}{2x}$$

$$= -1$$

10.设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1} =$

10.解析：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

得 $\left.\frac{dy^2}{dx^2}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$

11. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0),\text{且}f(0)=m,f'(0)=n$ ，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=$

11.解析：

特征方程为 $\lambda^2+a\lambda+1=0$ 特征根为 λ_1,λ_2 ，则 $\lambda_1+\lambda_2=-a,\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ ，特征根 $\lambda_1<0,\lambda_2<0$

$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}[f''(x)+af'(x)]\mathrm{d}x$$

$$=-[f'(x)+af(x)]|_0^{+\infty}$$

$$=n+am$$

12.设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$ ，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$

12.解析：

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{x(xy)^2}\cdot x=x\mathrm{e}^{x^3y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}=\mathrm{e}^{x^3y}+3x^3y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\mathrm{e}+3\mathrm{e}=4\mathrm{e}.$$

13.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}=$

13.解析：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

14.设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y = \sin X$，则 $Cov(X,Y) =$

14.解析：

解 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EXEY$

$= E(X\sin X) - EXE(\sin X)$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \frac{1}{\pi} dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} x dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \sin x dx$

$= 2\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx - 0$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x) d\cos x$

$= \frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right)$

$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\pi}$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证

明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的最大值

15.解析：

求一阶导可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x$$

令$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$可得$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{1}{6}\\ y=\dfrac{1}{12}\end{cases}$

求二阶导可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 y}=-1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y$$

当$x=0,y=0$时.$A=0.B=-1.C=0$

$AC-B^2<0$故不是极值.

当$x=\dfrac{1}{6}y=\dfrac{1}{12}$时

$A=1.B=-1.C=4.$

$AC-B^2>0.A=1>0$故$\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)$是极小值点

极小值$f\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12}\right)=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3+8\left(\dfrac{1}{12}\right)^3-6\times\dfrac{1}{12}=-\dfrac{1}{216}$

16.（本题满分 10 分）

计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\dfrac{x+y}{4x^2+y}dy$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向

16.解析：

设$P=\dfrac{4x-y}{4x^2+y^2},Q=\dfrac{x+y}{4x^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-4x^2+y^2-8xy}{(4x^2+y^2)^2}$

取路径 $L\varepsilon: 4x^2+y^2=\varepsilon^2$, 方向为顺时针方向.

$$
\begin{aligned}
&\text{则}\int_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy\\
&=\int_{L+L\varepsilon}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy-\int_{L\varepsilon}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy\\
&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_\varepsilon^-}(4x-y)dx+(x+y)dy\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_D\left[1-(-1)\right]dxdy=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2S_{D_\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}=\pi.
\end{aligned}
$$

17.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,(n+1)a_n+1=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n$，证明：当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=1} a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

17.证明：由 $(n+1)a_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)a_n, a_1=1$ 知 $a_n>0$

则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1}<1$，即 $a_{n+1}<a_n$

故 $\{a_n\}$ 单调递减且 $0<a_n<1$，故 $\left|a_nx^n\right|<\left|x^n\right|$

当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛.

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)a_nx^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

$$=1+x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\frac{1}{2}S(x)$$

$$=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)$$

则 $(1-x)S'(x)-\frac{1}{2}S(x)=1$ 即 $S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}$

解得 $S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(-2\sqrt{1-x}+c\right)$

又 $S(0)=0$ 故 $c=2$ 因此 $S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2.$

18.（本题满分 10 分）

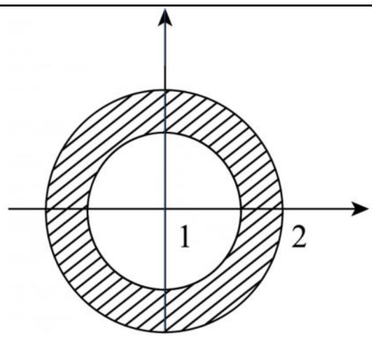
设 Σ 为曲面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}\left(\le x^2+y^2\le 4\right)$ 的下侧，$f(x)$ 是连续函数，计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)+2xy-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$

18. 解析：

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 则 $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

于是



$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}\left\{[xf(xy)+2xy-y]\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+[yf(xy)+2y+x]\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-[zf(xy)+z]\right\}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{2x^2y-xy+2y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_{D_1}\left(\frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{2r^2\sin^2\theta}{r}rdr-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r^2dr\right)$$

$$=4\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{7}{3}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{3}\right)=0.$$

19.设函数 $f(x)$ 在区间[0,2]上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0, M=\max\limits_{x\in(0,2)}\{|f(x)|\}$，

证明（1）存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$

（2）若对任意的 $x\in(0,2),|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$.

19.证明：（1）由 $M=\max\{|f(x)|\}$，$x\in[0,2]$ 知存在 $c\in[0,2]$，使 $|f(c)|=M$，

若 $c\in[0,1]$，由拉格朗日中值定理得至少存在一点 $\xi\in(0,c)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(0)}{c}=\frac{f(c)}{c}$$

从而 $|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{c}=\dfrac{M}{c}\geq M$

若 $c\in(1,2]$，同理存在 $\xi\in(c,2)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(c)}{2-c}=\frac{-f(c)}{2-c}$$

从而 $|f'(\xi)|=\dfrac{|f(c)|}{2-c}=\dfrac{M}{2-c}\geq M$

综上，存在$\xi \in (0,2)$，使$|f'(\xi)| \geq M$.

（2）若$M > 0$，则$c \neq 0, 2$.

由$f(0) = f(2) = 0$及罗尔定理知，存在$\eta \in (0,2)$，使$f'(\eta) = 0$,

当$\eta \in (0, c]$时，

$$f(c) - f(0) = \int_0^c f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$M = |f(c)| = |f(c) - f(0)| \leq \int_0^c |f'(x)|\,\mathrm{d}x < Mc,$$

又$f(2) - f(c) = \int_c^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$

$$M = |f(c)| = |f(2) - f(c)| \leq \int_c^2 |f'(x)|\,dx \leq M(2-c)$$

于是$2M < Mc + M(2-c) = 2M$矛盾.

故$M = 0$.

20. 设二次型$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$经正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$化为二次型$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$，其中$a \geq b$.

（1）求a, b的值.

（2）求正交矩阵Q.

20.解析：

（1）设$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$

由题意可知$Q^{\mathrm{T}}AQ = Q^{-1}AQ = B$.

∴A合同、相似于B

$$\therefore \begin{cases} 1+4 = a+b \\ ab = 4 \end{cases} \quad a \geq b$$

$\therefore a = 4. \quad b = 1$

（2）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda$

$\therefore A$ 的特征值为 0，5

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0E-A)x=0$.得基础解为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda=5$ 时，解 $(5E-A)x=0$ 得基础解为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

又 B 的特征值也为 0，5

当 $\lambda=0$ 时，解 $(0E-B)x=0$ 得 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\alpha_2$

当 $\lambda=5$ 时，解 $(5E-B)x=0$ 得 $\beta_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\alpha_1$

对 α_1,α_2 单位化

$$\gamma_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{-2}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

令 $Q_1=[\gamma_1,\gamma_2],Q_2=[\gamma_2,\gamma_1]$

则 $Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&5\end{bmatrix}=Q_2^{\mathrm{T}}BQ_2$

故 $Q_2Q_1^{\mathrm{T}}AQ_1Q_2^{\mathrm{T}}=B$

可令

$$Q=Q_1Q_2^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

21.设 A 为 2 阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

（1）证明 P 为可逆矩阵

（2）若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

21.解析：

(1) $\alpha\neq 0$且$A\alpha\neq\lambda\alpha$.

故α与$A\alpha$线性无关.

则 $r(\alpha,A\alpha)=2$

则 P 可逆.

$$AP=A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2x)=(\alpha A\alpha)\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$$

故$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$.

(2)由 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$

设 $(A^2+A-6E)\alpha=0,(A+3E)(A-2E)\alpha=0$

由 $\alpha\neq 0$得$(A^2+A-6E)x=0$有非零解

故$|(A+3E)(A-2E)|=0$

得$|A+3E|=0$或$|A-2E|=0$

若$|(A+3E)|\neq 0$则有$(A-2E)\alpha=0$, 故$A\alpha=2\alpha$, 与题意矛盾

故$|A+3E|=0$, 同理可得$|A-2E|=0$.

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=-3\ \ \lambda_2=2$.

A 有 2 个不同特征值，故 A 可相似对角化

22.设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}, Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

（1）求二维随机变量（X_1，Y）的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.

（2）证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

22.解析：

$$\begin{aligned}(1)F(x,y)&=P\{X_1\le x,Y\le y\}\\&=P\{X_1\le x,X_3(X_1-X_2)+X_2\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,X_3(X_1-X_2)+X_2\le y,X_3=1\}\\&=P\{X_1\le x,X_2\le y,X_3=0\}+P\{X_1\le x,X_1\le y,X_3=1\}\end{aligned}$$

若$x \le y$,则$P\{X_1 \le x, X_1 \le y, X_3 = 1\} = \frac{1}{2}P\{X_1 \le x\} = \frac{1}{2}\Phi(x)$

若$x > y$,则$P\{X_1 \le x, X_1 \le y, X_3 = 1\} = \frac{1}{2}P\{X_1 \le y\} = \frac{1}{2}\Phi(y)$

故$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(x), x \le y \\ \frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y), x > y \end{cases}$

(2)

$$\begin{aligned} &F_Y(y) = P\{Y \le y\} \\ &= P\{X_3(X_1 - X_2) + X_2 \le y\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X_3(X_1 - X_2) + X_2 \le y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2}P\{X_3(X_1 - X_2) + X_2 \le y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{X_2 \le y \mid X_3 = 0\} + \frac{1}{2}P\{X_1 \le y \mid X_3 = 1\} \\ &= \frac{1}{2}\Phi(y) + \frac{1}{2}\Phi(y) \\ &= \Phi(y). \end{aligned}$$

23.设某种元件的使用寿命T的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \ge 0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

其中θ, m为参数且大于零.

（1）求概率$P\{T > t\}$与$P\{T > s + t \mid T > s\}$，其中$s > 0, t > 0$.

（2）任取n个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为$t_1, t_2 \cdots, t_n$，若m已知，求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

23.解析：

（1） $P\{T > t\} = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$P\{T > s + t \mid T > s\} = P\{T > t\} = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

(2) $f(t) = F'(t) = \begin{cases} m\theta^{-m}t^{m-1}.e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \ge 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f\left(t_i,\ \theta\right)=\begin{cases} m^n\theta^{-mn}\left(t_1\cdots t_n\right)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m} & t_i\ge 0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

当 $t_1\ge 0,t_2\ge 0,\cdots,t_n\ge 0$ 时

$L(\theta)=m^n\theta^{-mn}\left(t_1\cdots t_n\right)^{m-1}e^{-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m}$

取对数 $\ln L(\theta)=n\ln m-mn\ln\theta+(m+1)\sum_{i=1}^{n}\ln t_i-\theta^{-m}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,m}$

求导数 $\frac{d\ln(\theta)}{d\theta}=-\frac{mn}{\theta}+m\theta^{-(m+1)}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,m}$

令 $\frac{d\ln(\theta)}{d\theta}=0$ 解得 $\theta=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,m}}$

所以 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,m}}$